الجـــزء الثـــالث

من كتاب التحفة البهية فى الاصول الهندسية

وهو مقرر الدروس الهندسية لتلامذة السنة الثالثة بمدرسة التجهيزية

تأليف

المرحوم احمد بك نظيم

ناظـــر مدرســـة دار العـــلوم وقـــلم الترجـــة

(تنبيـــــــه)

وان كنا ذكرنا فى خطبة الكتاب فى الجزء الاول ان الزيادات تميز عن الاصل بكتابتها بحروف دقيقة غير أن مقتضيات الاحوال أوجبت تميزها بوضع نجوم قبلها فى أوائل السطور فليتنبه

(الطبعة الثانية)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحمية

فى أواخر ربيع الاول سنة ١٣١٢

هجرية

بسم الله الرحمن الرحيم

الجـــــزء الثـــالث

فى المستوى والزوايا المجسمة والكرة وكثيرات السطوح

البـــاب الاول

(فى المســــتوى والزوايا المجسمة)

الفصــــــل الاول

(فى المستوى وتعيينه)

(٢٠٢) المستوى هو كما تقدم (٩) سطح غير محدود ينطبق عليه المستقيم كمال الانطباق فى جميع جهاته

(٢٠٣) ويتعين وضعه

أولا — بكل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لانه تقدم فى (نمرة ١١) ان مثل هذه النقط الثلاث لايمكن أن يمر بها الامستو واحد

فعلى هذا كل مستقيمين متقاطعين يتعين بهما وضع مستو وكذا يتعين بكل مستقيم ونقطة خارجة عنه وانّ أىّ جزء من مستو يمكن أن ينطبق على أىّ جزء آخر منه أو من مستو آخر

ثانيا ـ بكل مستقيمين متوازيين لانه يؤخذ من تعريفهما وجودهما فى مستو واحد وغير ذلك حيث ان هذا المستوى يشتمل طبعا على أحدهما وعلى نقطة من الثانى فلا يمكن أن يمر بهما غيره

ومما ذكر نستنتج النتائج الآتية

الاولى ـ كل مستقيمين غير موجودين فى مستو واحد أى لو مررنا مستويا باحدهما وكان قاطعا للثانى فلا يقال لهما متوازيان ولا متقاطعان ومن هنا يعلم أن من أى نقطة فراغية لا يمكن تمرير الا مستقيم واحد يوازى آخر معلوما

الثانية ـ لا يمكن أن يكون تقاطع أى مستويين الا مستقيما لانه ان لم يكن كذلك لوجد بالاقل على خط تقاطعهما ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة واذن فيتحدان معا ويصيران مستويا واحدا وهو مغاير للغرض

الثالثة ـ يمكن أن نتصور تولد المستوى امامن حركة مستقيم مار بنقطة معلومة ومتكئ على مستقيم معلوم واما من حركة مستقيم بالتوازى لنفسه ومتكئ على آخر معلوم

الفصـــل الثـانى

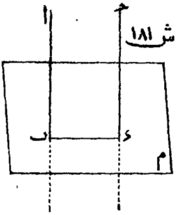
(فى المستقيمات والمستويات المتوازية)

(٢٠٤) المستقيم والمستوى المتوازيان أو المستويان المتوازيان هما اللذان مهما امتدا لا يلتقيان أصلا

دعوى نظـــرية

(٢٠٥) المستوى القاطع لاحد مستقيمين متوازيين يكون قاطعا للثانى والموازى لاحدهما يكون موازيا للثانى (شكل ١٨١)

أولا ـ اذا كان المستوى م قاطعا لاحد المستقيمين المتوازيين ا ب مثلا فى نقطة ب يكون قاطعا للثانى حـ ء وللوصول الى ذلك يكفى البرهنة على أن المستوى م لا يحتوى على المستقيم حـ ء ولا يوازيه



ش ١٨١

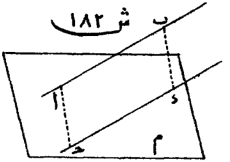
فاذا احتوى المستوى م المستقيم حـ ء فمن حيث انه يحتوى زيادة على ذلك على نقطة ب من المستقيم ا ب

فيكون مشتملا عليهما معا (٢٠٣ ثانيا) وبذلك يكون هو نفس مستوى المستقيمين المتوازيين وهو مغاير للغرض واذن فلا يكون المستوى م مشتملا على المستقيم حء

ثم يقال حيث ان مستوى المستقيمين المتوازيين يجب أن يقطع المستوى م فى مستقيم (٢٠٣ نتيجة) يمر بنقطة ب وانه لو امتد هذا المستقيم الموجود فى كلا المستويين فانه يقابل المستقيم حء فى نقطة ء احدى نقط المستوى م فاذن لا يكون المستوى م موازيا للمستقيم حء بل قاطعا له

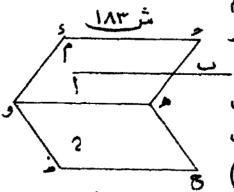
ثانيا — كل مستو مثل م يكون موازيا اب مثلا فانه يكون موازيا للثانى حء لانه ان لم يكن كذلك لكان قاطعا له واذن فيقطع المستقيم اب (أولا)

وهو مغاير للغرض



نتيجة ١ — (شكل ١٨٢) اذا مد من نقطة ح احدى نقط المستوى م الموازى للمستقيم اب المستقيم حء موازٍ للمستقيم اب فيكون موجودا بتمامه فى المستوى م لانه ان لم يكن كذلك لقطع المستوى م المستقيم اب (أولا) وهو محال

نتيجة ٢ — اذا وازى المستويان م و ن المستقيم اب (شكل ١٨٣) فان خط تقاطعهما هو يكون موازيا اب لانه لو مد من نقطة ه احدى نقط خط التقاطع مستقيم يوازى اب فان هذا المستقيم يجب أن يكون موجودا فى كلا المستويين م و ن كما ذكر بالنتيجة السابقة واذن فيكون هو خط تقاطعهما



نتيجة ٣ — اذا كان المستقيم حء موازيا للمستوى ن ومررنا به مستويا آخر م قاطعا للمستوى ن فان خط تقاطعهما يكون موازيا للمستقيم حء (شكل ١٨٣)

لان المستقيم المار بنقطة ه احدى نقط خط تقاطع المستويين وموازيا للمستقيم حء يجب أولا أن يكون موجودا فى المستوى ن (نتيجة ١) وثانيا يجب أن يكون فى المستوى م لانه يحتوى على أحد المستقيمين المتوازيين وعلى نقطة من الثانى

نتيجة ٤ — (شكل ١٨٣) المستويان م و ن المااران بالمستقيمين حء و عط المتوازيين يتقاطعان فى مستقيم هو موازٍ لكل واحد من المستقيمين المذكورين

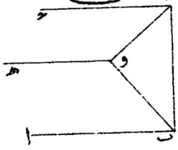
لان المستقيم المار بنقطة هـ احدى نقط خط تقاطع المستويين بالتوازى لكل واحد من المستقيمين حـ ى و ح ط يجب أن يكون موجودا فى كلا المستويين واذن يكون هو خط تقاطعهما

نتيجة ٥ – (شكل ١٨٢) كل مستقيم مثل ا ب يوازى آخر حـ ى موجود ابتمامه فى مستوى م يكون موازيا لهذا المستوى
لانه اذا قطع المستوى م المستقيم ا ب فانه يقطع الموازى له حـ ى ولا يكون اذن موجودا بتمامه فى المستوى وهو مغاير للغرض

دعوى نظرية

(٢٠٦) المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان (شكل ١٨٤)
لنفرض أن المستقيمين ا ب و حـ ى موازيان للمستقيم هـ و
أولا – لايمكن أن يتقاطع المستقيمان ا ب و حـ ى
لانه لو حصل ذلك لامكن من نقطة فراغية مد مستقيمين موازيين لثالث وهو محال (٢٠٣ نتيجة ١)
ثانيا – ان المستقيمين المذكورين موجودان فى مستو واحد لانه اذا قطع المستوى ح مثلا المار بالمستقيم ا ب وبنقطة ى المستقيم حـ ى فانه يقطع ضرورة الموازى له هـ و واذن فيقطع أيضا المستقيم ا ب الموازى هـ و وبناء عليه فلا يكون مشتملا عليه وهو مغاير للغرض

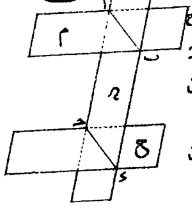
ش ١٨٤



دعوى نظرية

(٢٠٧) خطا تقاطع مستو بمستويين متوازيين مستقيمان متوازيان (شكل ١٨٥)
ليكن المستوى ن قاطعا للمستويين المتوازيين م و ع
فالمستقيمان ا ب و حـ ى الموجودان فى المستوى ن
لايمكن أن يتلاقيا لوجودهما أيضا فى مستويين متوازيين
واذن فهما متوازيان
نتيجة – المستقيمات المتوازية المحصورة بين مستويات متوازية هى متساوية

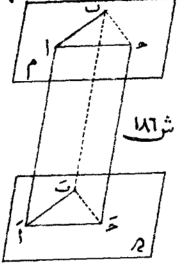
ش ١٨٥



فالمستقيمان ا ح و ب ء المتوازيان المحصوران بين المستويين م و ع المتوازيين متساويان لانا لو مررنا بهما المستوى ن فانه يقطع المستويين المتوازيين م و ع فى المستقيمين المتوازيين ا ب و ح ء واذن فيكون الشكل ا ب ح ء متوازى أضلاع ويكون فيه ا ح = ب ء وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(٢٠٨) كل نقطة مفروضة يمكن أن يمر بها مستو واحد مواز لمستو معلوم لا اثنان (شكل ١٨٦)



شـ ١٨٦

لتكن ا النقطة المفروضة خارج المستوى ن

أولا ـ يمد من نقطة ا مستقيما ا ب و ا ح موازيان بالتناظر للمستقيمين اَ بَ و اَ حَ الكائنين فى المستوى المعلوم فيكونان موازيين لهذا المستوى (٢٠٥ نتيجة ٥) ويكون مستويهما ا ب ح موازيا للمستوى اَ بَ حَ لانه ان لم يكن كذلك لقابله فى مستقيم يوازى كل واحد من المستقيمين المتقاطعين ا ب و ا ح (٢٠٥ نتيجة ٤) وهو محال

ثانيا ـ لو فرض تمرير مستو آخر من نقطة ا مواز للمستوى اَ بَ حَ خلاف المستوى ا ب ح فانا نتصور من نقطة ا تمرير مستو قاطع للمستويات الثلاثة فيقطع المستويين المارين بنقطة ا فى مستقيمين مارين منها وموازيين للمستقيم الذى يتقاطع فيه المستوى القاطع بالمستوى المعلوم (٢٠٥ نتيجة ٣) وهو محال

نتيجة ١ ـ المحل الجامع للمستقيمات المارة من نقطة واحدة بالتوازى لمستوى معلوم هو مستو مواز للمستوى المذكور

وذلك لان اثنين منها يتعين بهما مستو مواز للمستوى المعلوم وحيث انه لا يمكن أن يمر بالنقطة المفروضة الا مستو واحد يوازى المستوى المذكور فتكون جميع هذه المستقيمات موجودة فى مستو واحد يوازى المستوى المعلوم

نتيجة ٢ ـ اذا قطع مستو أحد مستويين متوازيين فانه لابد أن يقطع الثانى

نتيجة ٣ ـ اذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فانه لابد أن يقطع الثانى لانا اذا مررنا بهذا المستقيم مستويا فانه يقطع المستويين المتوازيين فى مستقيمين متوازيين

وحيث ان المستقيم المعلوم يقطع أحد هذين المستقيمين المتوازيين فانه يقطع الثانى واذن فيقطع المستوى المشتمل على هذا المستقيم

نتيجة ٤ ـ المستقيم أو المستوى الموازى لاحد مستويين متوازيين يكون موازيا للثانى لانه اذا قطعه فانه يقطع الثانى وبناء عليه فالمستويان الموازيان لثالث متوازيان

دعوى نظرية

(٢٠٩) الزاويتان الغير الموجودتين فى مستو واحد اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتجهة فى اتجاه واحد تكونان متساويتين ويكون مستوياهما متوازيين (شكل ١٨٦)

لكن اب يوازى اَبَ ومتحدا معه فى الجهة , اح يوازى اَحَ ومتحدا أيضا معه فى الجهة فنأخذ اب = اَبَ , اح = اَحَ ثم نصل ب ح , بَ حَ , ا اَ , ب بَ , ح حَ فالشكل اب اَبَ يكون متوازى الاضلاع لان فيه الضلعين المتقابلين اب , اَبَ متوازيان ومتساويان وحينئذ يكون الضلعان ا اَ , ب بَ متوازيين ومتساويين أيضا وبمثل ذلك يبرهن على أن ح حَ , ا اَ متوازيان ومتساويان واذن يكون ب بَ , ح حَ متوازيين ومتساويين ويكون الشكل ب بَ ح حَ متوازى الاضلاع ويكون فيه ب ح = بَ حَ ويوازيه وحينئذ فالمثلثان اب ح , اَبَ حَ متساويان لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما وينتج من تساويهما أن الزاوية ب اح = الزاوية بَ اَحَ

وأما توازى مستويهما فهو ناتج من النظرية المتقدمة (٢٠٨)

تنبيه ـ اذا اختلف ضلعا زاوية اَ فى الجهة مع ضلعى زاوية ا مع بقاء التوازى بينها فان الزاوية التى تحدث بين مثل هذين الضلعين تكون مساوية لزاوية اَ أو مساوية لزاوية ا وأما اذا اتحد ضلعان من أضلاع الزاويتين المذكورتين فى الجهة واختلف الضلعان الآخران فيها فان الزاوية التى تحدث بين مثل هذين الضلعين تكون مكملة لزاوية اَ أو لزاوية ا

نتيجة ـ اذا فرض مستقيمان ا , ب موضوعان بطريقة ما فى الفراغ فانه يطلق على الزاوية الحادثة بين المستقيمين المارين من أى نقطة بالتوازى للمستقيمين المفروضين اسم زاوية المستقيمين الفراغيين

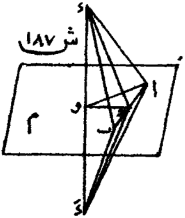
ولاجل أن يكون هذا التعريف عاما يجب أن يبرهن على أن هذه الزاوية غير مرتبطة بوضع النقطة التى اختيرت لمد المستقيمين المتوازيين وهذا أمر ينتج من النظرية المتقدمة

الفصـــــل الثـالث

(فى المستقيمات والمســتويات المتعامدة)

دعوى نظـــــرية

(٢١٠) كل مستقيم عمودى على مستقيمين من مستو يكون عمودا على أى مستقيم من المستوى المذكور (شكل ١٨٧)



وهذه الدعوى على ثلاثة أحوال

الحالة الاولى ــ ان يكون المستقيم ء و عمودا على المستقيمين و ا و و ب المارّين من موقعه فى المستوى (موقع العمود على المستوى هو نقطة تقابله به) ويطلب البرهنة على أنه عمود على أى مستقيم مثل و ح مار من موقعه وفى المستوى المذكور

وانلك يمد العمود ء و تحت المستوى بمقدار و ءَ = و ء ثم تقطع المستقيمات الثلاثة و ا و و ب و و ح بالمستقيم ا ح ب وتوصل النقطتان ء و ءَ بكل واحدة من النقط الثلاثة ا و ب و ح فالمستقيمان ا ء و ا ءَ متساويان لوجود نقطة ا على العمود ا و المقام على منتصف ء ءَ ومثلهما المستقيمان ب ء و ب ءَ واذن فالمثلثان ء ا ب و ءَ ا ب متساويان لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما ثم اذا دور المثلث ءَ ح ا حول الضلع ا ح فانه يمكن وضع نقطة ءَ على نقطة ء وحيث ان نقطة ح ثابتة فى أثناء الحركة فينطبق الضلع ءَ ح على الضلع ء ح ويساويه وحينئذ يكون المثلث ء ح ءَ متساوى الساقين وحيث ان المستقيم ح و واصل من رأسه الى منتصف قاعدته فيكون عمودا عليها (٢٩ ثالثا)

الحالة الثانية ــ أن يكون المستقيم ء و عمودا على المستقيمين و ا و و ب المارين من موقعه فى المستوى ويطلب البرهنة على أنه عمود على أى مستقيم مثل ب ح من المستوى المذكور

وللبرهنة على ذلك يقال اذا امد من نقطة و مستقيم يوازى ب ح فيكون موجودا فى المستوى م وعمودا على و ء (الحالة الاولى) واذن فيكون ء و عمودا على ب ح (٢٠٩ نتيجة)

الحالة الثالثة ــ أن يكون المستقيم ء و عمودا على مستقيمين أيا كانا فى المستوى ويطلب البرهنة على أنه عمود على أى مستقيم من المستوى

وذلك لانه اذا رسم من نقطة و موقع العمود المستقيمان و ا و و ب موازيان بالتناظر للمستقيمين المفروض تعامدهما على المستقيم د و فتكون كل واحدة من الزاويتين د و ا و د و ب قائمة (٢٠٩) واذن فيكون د و عمودا على أى مستقيم مرسوم فى المستوى (الحالة الاولى والثانية)

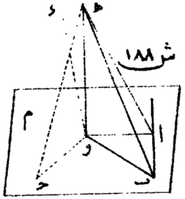
تنبيه — المستقيم العمودى على مستو هو ما كان عمودا على كل مستقيم يرسم فى المستوى ويشاهد مما سبق البرهنة عليه فى النظرية المتقدمة أنه يكفى لان يكون مستقيم عمودا على مستو أن يكون عمودا على مستقيمين مرسومين فى المستوى

نتيجة — اذا كان مستقيم عمودا على مستوى مستقيمين ا و ب موازيين لمستو آخر يكون عمودا على المستوى المذكور لانه اذا مد من نقطة ما من المستوى الاخير مستقيمان موازيان للمستقيمين ا و ب فيكونان موجودين فيه (٢٠٥ نتيجة ١) وعمودين على المستقيم الاول واذن فيكون هذا المستقيم عمودا على كل مستقيم مرسوم فى المستوى وبناء عليه يكون عمودا على المستوى

دعوى نظرية

(٢١١) كل نقطة مفروضة لا يمكن أن يمد منها الا مستقيم واحد عمودى على مستو معلوم (شكل ١٨٨)

وهذه الدعوى على حالتين



الحالة الاولى — أن تكون النقطة المفروضة خارج المستوى المعلوم م ولتكن هـ فيرسم لذلك مستقيم ما ا ب فى المستوى ثم يتصور تمرير مستو بالمستقيم المذكور وبنقطة هـ (٢٠٣ أولا) وفى هذا المستوى ينزل من نقطة هـ العمود هـ ا على المستقيم ا ب ثم يقام من نقطة ا الموجودة فى المستوى م العمود ا و على ا ب ثم يتصور تمرير مستو بالمستقيمين ا هـ و ا و المتقاطعين (٢٠٣ أولا) وفيه يمكن انزال من نقطة هـ العمود هـ و على ا و فيكون عمودا على المستوى م

لان المستقيم ا ب عمود على المستقيمين ا و و ا هـ الموجودين فى المستوى ا و هـ فيكون عمودا على و هـ واذن يكون هـ و عمودا على المستقيمين ا و و ا ب الموجودين فى المستوى م

فيكون عموداعليه وبذلك يشاهد امكان انزال من نقطة ه العمود ه و على المستوى م
ثم اذا قيل بامكان انزال عمودآخر منها ه ب على المستوى المذكور كان المثلث الحادث ه و ب
فيه زاويتان قائمتان وهومحال أوأنه أمكن من نقطة ه فى مستوى ه و ب انزال عمودى
ه و , ه ب على المستقيم ب و وهومحال

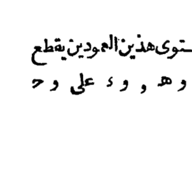
الحالة الثانية — أن تكون النقطة المفروضة كائنة على المستوى م ولتكن و فيرسم لذلك
مستقيم مّا ا ب فى المستوى وينزل من نقطة و العمود و ب على هذا المستقيم ثم يتصور تمرير
مستوما بالمستقيم ا ب غير المستوى م وفى هذا المستوى يمكن اقامة العمود ا ه على ا ب
ثم يقام من نقطة و فى مستوى المستقيمين ا و , ا ه العمود و ه على المستقيم و ا
فيكون عمودا على المستوى م (والبرهنة على ذلك مثل المتقدمة)

ثم اذا قيل بامكان اقامة عمودآخر و د على المستوى م فان مستوى هذين العمودين يقطع
المستوى م فى المستقيم و ح واذن فقد أمكن اقامة العمودين و ه , و د على و ح
فى المس[illegible] ه و ح وهومحال

دعوى نظـــــــرية

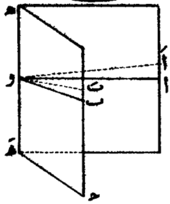
(٢١٢) كل نقطة مفروضة لايمكن أن يمر بها الامستو واحد عمودى على مستقيم معلوم وهذه
الدعوى على حالتين

الحالة الاولى (شكل ١٨٩) — أن تكون النقطة المفروضة خارج المستقيم المعلوم ولتكن ح
فيتصور بالمستقيم ه هَ وبنقطة ح مستو ينزل فيه من
نقطة ح العمود ح و على ه هَ ثم يتصور أيضا تمرير مستو
آخر كيف اتفق بالمستقيم ه هَ وفيه يقام من نقطة و العمود
و ا على ه هَ فيكون مستوى المستقيمين ح و , و ا
عمودا على ه هَ (٢١٠)



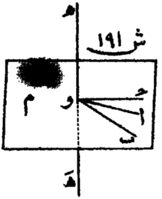
ثم اذا قيل بامكان تمرير مستوآخر من نقطة ح عمود على ه هَ
وقابله فى نقطة ب كان المثلث الحادث ح ب و فيه زاويتان
قائمتان وهومحال وان قيل بامكان تمرير مستوآخر بالمستقيم ح و عمود على ه هَ فان
المستوى ه هَ ا يقطع هذين المستويين فى مستقيمين عمودين على ه هَ وهومحال

الحالة الثانية (شكل ١٩٠) – أن تكون النقطة المفروضة و على المستقيم هـ هـَ فيمرر لذلك بالمستقيم هـ هـَ مستويان ويقام فيهما عليه العمودان و ا , و ب فيكون مستوى هـذين العمودين عمودا على هـ هـَ



ثم اذا قيل بامكان تمرير مستو آخر عمودى على هـ هـَ ومار بنقطة و فان أحد المستويين هـ هـَ ا , هـ هـَ ب يقطع المستويين العموديين على هـ هـَ فى مستقيمين ب و , بَ و عمودين على هـ هـَ وهو محال

نتيجة – المحل الجامع لجميع الاعمدة المقامة على المستقيم هـ هـَ من نقطة و فى الفراغ هو المستوى العمودى على هـ هـَ المار بنقطة و (شكل ١٩١)



وذلك لان اثنين منها يتعين بهما وضع المستوى م العمودى على هـ هـَ و المار بنقطة و ولما كان لا يمكن أن يمر بنقطة و الا مستو واحد عمودى على هـ هـَ فتكون جميع الاعمدة موجودة فى هذا المستوى

دعوى نظـــــــرية

(٢١٣) اذا أنزل من نقطة خارج مستو عمود عليه وأنزل من موقعه عمود على مستقيم كائن فيه ووصلت نقطة تقابلهما باحدى نقط المستقيم العمودى على المستوى كان هذا المستقيم عمودا على المستقيم الكائن فى المستوى (وتسمى هذه النظرية بنظرية الاعمدة الثلاثة شكل ١٨٨)

ليكن هـ و عمودا على المستوى م , و ا عمودا على ا ب فانه ينتج من الفروض أن ا ب عمود على المستقيمين ا و , و هـ من المستوى هـ ا و (٢١٠ تنبيه) فيكون عمودا عليه واذن فيكون عمودا على ا هـ وهو المراد

دعوى نظـــــــرية

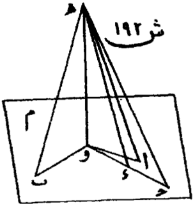
(٢١٤) اذا أنزل من نقطة خارج مستو مستقيم عمود عليه وجملة موائل فانه يحدث

أوّلا – أن العمود أقصر من كل مائل

ثانيا ـ المائلان اللذان افترقا بعدين متساويين عن موقع العمود متساويان

ثالثا ـ المائلان اللذان افترقا عن موقع العمود ببعدين مختلفين أبعدهما أطول

رابعا ـ عكس جميع ما تقدم صحيح (شكل ١٩٢)



ش ١٩٢

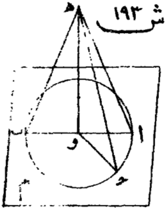
ليكن هـ و عمودا على المستوى م , هـ ا , هـ ب , هـ ح موائل و ا و = ب و

برهان الاول ـ حيث كان هـ و فى المستوى هـ و ا عمودا على و ا كان هـ ا مائلا عليه ويكون هـ و < هـ ا

برهان الثانى ـ حيث ان المثلثين هـ و ا , هـ و ب فيهما زاوية قائمة محاطة بأضلاع متساوية فيهما النظير لنظيره فيكونان متساويين ويكون هـ ا = هـ ب

برهان الثالث ـ يؤخذ من و ح البعد و ء = و ا ففى المستوى هـ و ح المائل هـ ح > هـ ء وحيث كان هـ ء = هـ ا يكون هـ ح > هـ ا

برهان الرابع ـ يبرهن على عكس النظريات المتقدمة بواسطة ترجيع الامر الى الاستحالة فيقال مثلا اذا كان هـ و أصغر من أى مستقيم مثل هـ ا ممدود من نقطة هـ الى المستوى م فيكون عمودا عليه لانه ان لم يكن كذلك لكان مائلا عليه وبذلك لا يكون أصغر الأبعاد المحصورة بين نقطة هـ والمستوى وهو خلاف وهكذا



ش ١٩٣

تنبيه ـ العمود النازل من أى نقطة على مستو يسمى بعد النقطة عن المستوى

نتيجة ـ المحل الجامع لمواقع الموائل المتساوية الممدودة من نقطة فراغية الى مستو هو محيط دائرة مركزه موقع العمود على المستوى المذكور (شكل ١٩٣) لانه حيث كانت جميع هذه الموائل متساوية فتكون أبعادها عن موقع العمود كذلك (الرابع)

دعوى نظـــــرية

(٢١٥) المستوى العمودى على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودا على الثانى وللبرهنة على ذلك يقال من المعلوم أن المستقيمين المتوازيين يصنعان زاويتين متساويتين مع أى مستقيمين

متوازيين ممدودين من نقطتى تقابلهما بالمستوى (٢٠٨) فاذا كان أحدهما عمودا على جميع مستقيمات المستوى فيكون الثانى كذلك أعنى يكون عمودا على المستوى

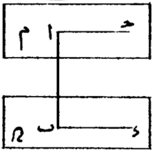
نتيجة ـ عكس هذه النظرية صحيح أعنى أن المستقيمين العمودين على مستو يكونان متوازيين لانه ان لم يكونا كذلك لتلاقيا فى نقطة واذن فقد أمكن منها انزال عمودين على المستوى وهو محال

دعوى نظرية

(٢١٦) المستقيم العمودى على أحد مستويين متوازيين يكون عمودا على الثانى (شكل ١٩٤)

ليكونا م و ن المستويين المعلومين و ا ب المستقيم المعلوم العمودى على المستوى م وللبرهنة على ذلك يقال

شر ١٩٤



أولا ـ المستقيم ا ب لابد أن يقابل المستوى ن الثانى (٢٠٨ نتيجة ٣)

ثانيا ـ يمرر بالمستقيم ا ب مستويا يقطع المستويين المتوازيين فى المستقيمين المتوازيين ا حـ و ب ى وحيث كان ا ب عمودا على أحدهما فيكون عمودا على الثانى ب ى وباعادة هذا العمل بواسطة تمرير مستو ثان وثالث وهكذا بالمستقيم ا ب فانها تثبت النظرية

نتيجة ـ عكس هذه النظرية صحيح أعنى أن المستويين العمودين على مستقيم متوازيان لانه ان لم يكونا كذلك لتقاطعا فى مستقيم وحينئذ فقد أمكن من احدى نقط خط التقاطع تمرير مستويين عمودين على مستقيم وهو محال

الفصل الرابع

(فى مسقط النقطة والمستقيم)

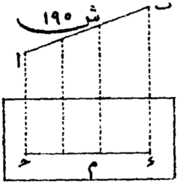
تعريفات

(٢١٧) مسقط أى نقطة على مستو هو موقع العمود النازل من هذه النقطة على هذا المستوى

(٢١٨) ومسقط مستقيم على مستو هو المحل الجامع لمساقط نقط المستقيم على المستوى

دعوى نظــــــرية

(٢١٩) مسقط المستقيم على المستوى هو خط مستقيم (شكل ١٩٥)



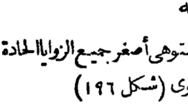
لتكن ح مسقط نقطة ا على المستوى م ى فنمرر بالمستقيمين ب ا و اح مستويا يقطع المستوى م ى فى المســتقيم ح ى فاذا أريد الآن اسقاط نقطة ب فاننا ننزل منها العمود ب ى على المســتوى فيكون موازيا اح (٢١٥ نتيجة) وبناء عليــه يكون موجودا بتمامه فى المستوى ب ا ح (٢٠٣) ويكون موقعه ى موجودا على المستقيم ح ى

وحينئذ يكون المحل الجامع لمساقط جميع نقط المستقيم ا ب هو مستقيم آخر ح ى

نتيجة ـ يكفى لايجاد مسقط مستقيم على مستوأن يجمع بين مسقطى نقطتين من نقطه بمستقيم

دعوى نظــــــرية

(٢٢٠) الزاوية الحادة الحادثة من أى مستقيم ومسقطه على مستو هى أصغر جميع الزوايا الحادة الحادثة من المستقيم المذكور وأى مستقيم مد من موقعه فى المستوى (شكل ١٩٦)



ليكن هـ ع المســتقيم المعلوم و ع و مســقطه على المستوى م و ع وَ مستقيما آخر ممدودا فى المستوى من الموقع ع

فاذا أخذ ع وَ = ع و ووصــل هـ وَ فالمثلثان هـ ع و و هـ ع وَ فيهما ع هـ مشترك بينهما والضلع ع وَ = ع و لكنه حيث كان الضلع هـ و أصغر من هـ وَ تكون زاوية هـ ع و أصغر من زاوية هـ ع وَ وهو المطلوب

تنبيه ـ الزاوية الحادة هـ ع و الحادثة من المستقيم هـ ع ومسقطه ع و على المستوى م تسمى بميل المستقيم على المستوى أو بزاوية المستقيم والمستوى

نتيجــة ـ الزاوية المنفرجة التى يصنعها المســتقيم مع امتداد مسقطه هى بناء على ما تقــدم أكبر جميع الزوايا التى يمكن حدوثها بين المستقيم المذكور وأى مستقيم مد من موقعه فى المستوى

الفصـــــل الخامس

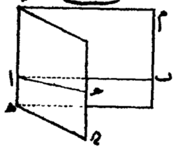
(فى الزوايا الزوجيـة)

تعـاريف

(٢٢١) الزاوية الزوجية هى الشكل المتكون من مستويين متقاطعين يسميان وجها الزاوية وخط تقاطعهما يسمى حرف الزاوية

وتقرأ الزاوية الزوجية بالحرفين الهجائيين المسمى بهما نقطتان من حرفها اذا كانت منفردة مثل زاوية ء هـ (شكل ١٩٧) وأما اذا اشتركت فى الحرف ء هـ مع زوايا أخرى فتقرأ بالاحرف الاربعة م ء هـ ۮ بشرط أن يكون الحرفان المسمى بهما حرفها فى الوسط

ش ١٩٧

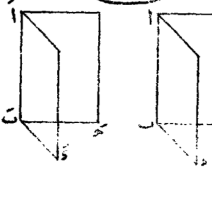


(٢٢٢) اذا أخذت نقطة مثل ا على حرف الزاوية وأقيم منها العمودان ا ب , ا ح على ء هـ كل واحد منهما فى وجه من وجهى الزاوية فان مقدار الزاوية ب ا ح الواقعة بين هـذين العمودين ثابت دائمـا مهـما كان وضع نقطـة ا على الحرف ولهذا تسمى هذه الزاوية بزاوية العمودين أو بالزاوية المسـتوية للزاوية الزوجيـة وهى التى يقدر بها ميل أحد المستويين على الآخر

(٢٢٣) الزاويتان الزوجيتان المتساويتان هـما اللتان ينطبق أوجههما على بعضهـما بمجرد انطباق حرفيهما

تنبيه ــ اذا طبقنا الزاوية الزوجيـة اَ بَ (شكل ١٩٨) على مساويتها ا ب وقعت نقطة بَ على نقطة ب فان زاوية العمودين حَ بَ ءَ للزوجيـة اَ بَ تنطبق ضرورة على زاوية العمودين ح ب ء للزوجية ا ب وأما اذا كانت زاوية العمودين حَ بَ ءَ مساوية لنظيرتها ح ب ء ووضعنا احداهما على الاخرى فان الحرف اَ بَ ينطبق ضرورة على الحرف ا ب وبذلك ينطبق وجها الزاوية الاولى على وجهى الزاوية الثانية ويتساويان وبناء على ذلك يقال

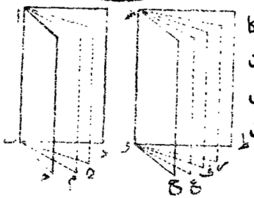
ش ١٩٨



أولا ـ يتساوى الزاويتان الزوجيتان اذا تساوى زاويتاهما المستويتان
ثانيا ـ يتساوى الزاويتان المستويتان اذا تساوى زاويتاهما الزوجيتان

دعوى نظــــرية

(٢٢٤) النسبة بين الزاويتين الزوجيتين هي على أي حالة كانت كالنسبة بين زاويتيهما المستويتين (شكل ١٩٩)



لنفرض أولا أن بين الزوجيتين مقياسا مشتركا أى زاوية زوجية منحصرة فيهما مرارا صحيحة بأن انحصرت ثلاث مرات في احداهما وأربعة في الثانية فتكون النسبة بين الزوجيتين كالنسبة بين هذين العددين الصحيحين أعني يكون

$$\frac{ح ا ب ى}{ح هـ و ط} = \frac{٣}{٤}$$

فاذا مررنا بكل واحدة من النقطتين ب و و مستويا عموديا على الحرف المقابل لها فان هذين المستويين يقطعان جميع الاوجه في مستقيمات عمودية على الحرفين ا ب و و هـ وبذلك تكون الزوايا ح ب م و م ب ن و ن ب ى و ح و ع و ... الخ هي الزوايا المستوية المقابلة للزوايا الزوجيـة الصغيرة وحيث كانت متساوية تكون المستوية كذلك (٢٢٣ تنبيه) ويشاهد انقسام زاوية ح ب ى الى ثلاث زوايا متساوية وزاوية ح و ط الى أربع زوايا متساوية فتكون النسبة بين الزاويتين ح ب ى و ح و ط كالنسبة بين العددين الصحيحين ٣ و ٤ ويحدث

$$\frac{ح ب ى}{ح و ط} = \frac{٣}{٤}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالسابق ينتج

$$\frac{ح ب ا ى}{ح هـ و ط} = \frac{ح ب ى}{ح و ط}$$

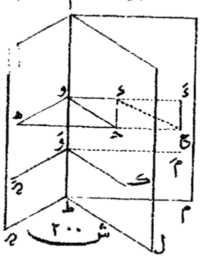
وأما اذا لم يوجد بين الزاويتين الزوجيتين مقياس مشترك فانه يبرهن على هذه النظرية بعين الطريقة التي اتبعت بنمرة (٨٠ جزء أول)

نتيجة ـ ينتج مما ذكر أن الزاوية المستوية أو زاوية العمودين يمكن اعتبارها مقياسا للزاوية الزوجية لان المقدار الذي ينتجه مقاس الزوجية هو عين الذي ينتجه مقاس المستوية عند مقارنة

كل منهما بالوحدة التي من نوعها بشرط أن تكون وحدة الزوايا المستوية هي زاوية العمودين لوحدة الزوايا الزوجية

دعوى نظرية

(٢٢٥) كل نقطة من نقط المستوى المنصف لزاوية زوجية على بعدين متساويين من وجهيها وبالعكس كل نقطة توجد على بعدين متساويين من وجهي زاوية زوجية تكون احدى نقط المستوى المنصف لها شكل (٢٠٠)



من المعلوم أن المستوى المنصف لزاوية زوجية هو مستو مار بحرفها وقاسمها الى زاويتين زوجيتين متساويتين

أولا ــ اذا فرضت نقطة ح على المستوى ا ل المنصف للزاوية الزوجية م ا ط ى وكان بعداها عن وجهيها ام ، اى هما حى ، حه يقال

حيث كان حى عمودا على المستوى م فيكون عمودا على المستقيم وا (٢١٠) وكذا حيث كان حه عمودا على المستوى ى فيكون عمودا أيضا على وا وحينئذ يكون هذا المستقيم وا عمودا على المستوى حى وه (٢١٠) وتكون اذن زاوية ى و ح مقاس الزاوية الزوجية م ا و ل وزاوية ح و ه مقاس الزاوية الزوجية ل ا و ى وحيث ان الزاويتين الزوجيتين متساويتان فرضا تكون المستويتان كذلك ويكون المثلثان القائما الزاوية ح و ى و ح و ه متساويين لتساوي فيهما وتر وزاوية من أحدهما لنظيريهما من الثاني وينتج من تساويهما ان حى = حه

ثانيا ــ اذا كان البعدان حى ، حه متساويين فانه يمر المستوى ح ا و فيكون المستقيم ح و منصفا ضرورة لزاوية ه و ى وحيث ان الزاويتين المستويتين ح و ى ، ح و ه متساويتان يكون الزوجيتان كذلك وبذلك يكون المستوى ا ل منصفا للزاوية الزوجية

نتيجة ــ كل نقطة مثل ع مأخوذة خارج المستوى المنصف هي على بعدين مختلفين من وجهي الزاوية الزوجية لانه لو كان الامر بخلاف ذلك لوجدت ضرورة على المستوى المنصف وهو بخلاف الفرض

المستوى المنصف لزاوية زوجية هو المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن وجهيها

الفصـــل السادس

(فى المســـتويات المتعامـــدة)

تعـــــريف

(٢٢٦) المستوى العمودى على آخر هو ما يصنع معه زاويتين زوجيتين متجاورتين متساويتين يقال لكل واحدة منهما قائمة

دعوى نظـــــرية

(٢٢٧) كل مستقيم كائن فى مستو لا يمكن أن يمر به الا مستو واحد عمودى على الاول

يبرهن على هذه النظرية بمثل ما سبقت البرهنة به على نظيرتها فى الباب الاول من الجزء الاول

نتيجة ــ يمكن أن يستعان بهذه النظرية على اثبات النظريات الآتية

الاولى ــ اذا لاقى مستو مستويا آخر فانه يصنع معه زاويتين زوجيتين متجاورتين مجموعهما يساوى زاويتين زوجيتين قائمتين

الثانية ــ اذا كان مجموع الزوجيتين المتجاورتين مساويا قائمتين يكون وجهاهما المتطرفان فى استواء واحد

الثالثة ــ اذا تقاطع مستويان فكل زاويتين زوجيتين متقابلتين بالحرف متساويتان

الرابعة ــ المستويان المنصفان لزاويتين زوجيتين متجاورتين متعامدان

دعوى نظـــــرية

(٢٢٨) الزاوية الزوجية القائمة تكون زاويتها المستوية كذلك وبالعكس

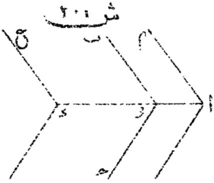
أولا ــ اذا كان المستوى م عموداعلى المستوى ن وقطعناهما بمستو عمودى على خط تقاطعهما فانه يحدد عليهما زاويتيهما المستويتين وتكونان متجاورتين وحيث كان الزوجيتان متساويتين تكون المستويتان كذلك واذن تكون كل واحدة منهما قائمة

ثانيا ــ اذا كانت الزاويتان المستويتان قائمتين وحادثتين من مد مستو عمودى على خط تقاطع مستويين فانه يجب أن تكون الزوجيتان متساويتين واذن تكون كل واحدة منهما قائمة

تنبيه ــ يكفى فى البرهنة على تعامد مستويين أن يبرهن على أن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية الحادثة بينهما تكون قائمة

دعوى نظـــــرية

(٢٢٩) كل مستو يمر بمستقيم عمودى على مستوآخر يكون عمودا على هـذا المستوى الاخير كما فى (شكل ٢٠١)

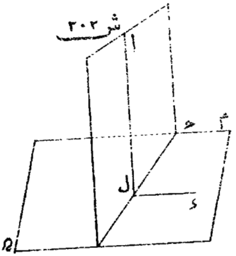


لكن ب و عمودا على المستوى حـ ى والمستوى م ى مارا بالمستقيم ب و فاذا كان و حـ عمودا على خط تقاطع المستويين ا ى تكون زاوية ب و حـ قائمة لان ب و عمود على المستوى حـ ى وحيث انها هى الزاوية المستوية المنسوبة للزاوية الزوجية الواقعة بين المستويين فيكونان متعامدين وهو المراد (٢٢٨)

نتيجة — كل مستو يوازى المستقيم ب و يكون عمودا على المستوى حـ ى لانه اذا أخذت فيه نقطة ومد منها مستقيم يوازى ب و فيكون موجودا بتمامه فيه (٢٠٥ نتيجة ٤) ويكون أيضا عمودا عليه (٢١٥)

دعوى نظــــــرية

(٢٣٠) وبالعكس اذا تعامد مستويان فكل مستقيم مد فى أحدهما عموديا على خط تقاطعهما يكون عمودا على الثانى (شكل ٢٠٢)



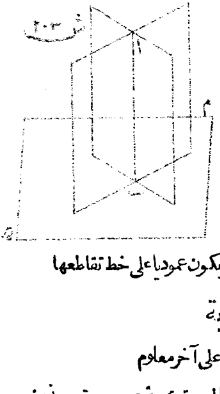
لكن المستويان م و ا متعامدين ومد المستقيم ا ل فى المستوى ا عموديا على حـ ب فيمد ل ى عمودا على حـ ب فى المستوى م فتكون زاوية ا ل ى هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية ا ب حـ ى وحيث كانت الزاوية الزوجية قائمة تكون المستوية كذلك ويكون ا ل عمودا على ل ى وحيث كان عمودا على حـ ب فيكون اذن عمودا على المستوى م ى

نتيجة ١ — اذا تعامد مستويان وأخذت نقطة على أحدهما وأنزل منها عمود على الثانى كان هذا العمود موجودا بتمامه فى المستوى الاول

لانه ان لم يكن كذلك وأنزل من النقطة المذكورة عمود على خط تقاطع المستويين فيكون عمودا على المستوى الثانى كما تقدم ذكره وحيث انه لا يمكن من النقطة المذكورة الا انزال عمود واحد على المستوى فالعمودان يتحدان اذن ويصيران واحدا وهو المطلوب

نتيجة ٢ ــ اذا تعامد مستويان فكل مستقيم مثل ا عمود على أحدهما م مثلا يكون موازيا للثانى وللبرهنة على ذلك تؤخذ نقطة فى المستوى ى وينزل منها عمود على المستوى م فيكون موجودا بتمامه فى المستوى ى (نتيجة ١) ويكون أيضا موازيا للمستقيم ا وحيث ان المستقيم ا موازلمستقيم كائن فى المستوى ى فيكون موازيا له (٢٠٥ نتيجة ٥) وهو المـــراد

دعوى نظـــــــرية



(٢٣١) المستويان العموديان على مستو ثالث يكون خط تقاطعهما عموديا على المستوى الاخير (شكل ٢٠٣) اذا كان ا ب خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى م ى فانا نأخذ نقطة مّا ا مثلا من خط التقاطع وننزل منها عمودا على المستوى م ى فيكون موجودا بتمامه فى كلا المستويين (٢٣٠ نتيجة ١) واذن فيكون هو خط تقاطعهما

نتيجة ــ ويمكن التعبير عن منطوق هذه النظرية بطريقة أخرى فيقال المستوى العمودى على مستويين متقاطعين يكون عموديا على خط تقاطعهما

دعوى نظـــــــرية

(٢٣٢) باى مستقيم لا يمكن أن يمر الا مستو واحد فقط عمودى على آخر معلوم

أولا ــ تؤخذ نقطة على المستقيم المعلوم وينزل منها عمود على المستوى ثم يمر مستو بهذين المستقيمين فيكون عمودا على المستوى المعلوم لاشتماله على مستقيم عمودى عليه (٢٢٩)

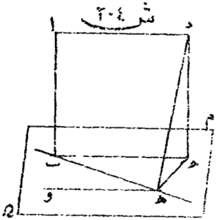
ثانيا ــ من المعلوم ان كل مستو يمر بالمستقيم المعلوم ويكون عمودا على المستوى المفروض لابد أن يحتوى على العمود المنزل من احدى نقط المستقيم على المستوى المذكور وحيث انه لا يمكن أن يمر بالمستقيمين المذكورين الا مستو واحد فقد ثبت المطلوب

تنبيه ـ ماذكرناه من البراهين يقتضى أن لا يتحد المستقيم المعلوم بالعمود المنزل من احدى نقطه على المستوى أعنى أن لا يكون المستقيم المفروض عمودا على المستوى المعلوم

نتيجة ـ وينتج من ذلك أن المستوى المسقط للمستقيم يكون عمودا على مستوى المسقط

دعوى نظـــرية

(٢٣٣) كل مستقيمين غير موجودين فى مستو واحد يمكن دائما أن يمد لهما أولا عمود مشترك بينهما وثانيا انه لا يمكن مد غيره وثالثا أن يكون هذا العمود أصغر الابعاد المحصورة بينهما (شكل ٢٠٤)



ليكونا ا د , ب هـ المستقيمين المعلومين الغير الموجودين فى مستو واحد فتؤخذ نقطة هـ على أحدهما ويمد منها المستقيم هـ و موازيا للثانى ثم يمرر بالمستقيمين هـ و , هـ ب مستو فيكون موازيا للمستقيم ا د (٢٠٥ نتيجة ٥)
فاذا كان المستقيمان المفروضان فى مستو واحد كان هذا المستوى مشتملا على ا د ضرورة ثم ينزل من نقطة د احدى نقط المستقيم ا د العمود د ح على المستوى م ك ويمد من موقعه ح المستقيم ح ب موازيا ا د فيكون موجودا بتمامه فى المستوى م ك (٢٠٥ نتيجة ١) ويقابل ب هـ لانه ان لم يقابله كان موازيا له ويترتب على ذلك موازاة المستقيمين ب هـ , ا د وهو مخالف للفرض ثم يمد من نقطة التقابل ب المستقيم ب ا موازيا للمستقيم د ح اذا تقرر هذا يقال

أولا ـ ان المستقيم ا ب عمود مشترك بين المستقيمين المفروضين لانه حيث كان المستقيم المذكور موازيا د ح العمودى على المستوى م ك فيكون عمودا عليه أيضا وبناء عليه يكون عمودا على المستقيمين ب هـ , ب ح أو ا د الموازى ب ح

ثانيا ـ انه لا يمكن تمرير خلاف هذا العمود المشترك بينهما لانه لو قيل ان د هـ عمود آخر مشترك بينهما فيكون ضرورة عمودا على ب هـ , و هـ الموازى ا د واذن يكون عمودا على المستوى م ك لكنه حيث كان د ح عمودا على المستوى م ك فقد أمكن انزال من نقطة هـ عمودين على المستوى م ك وهو محال (٢١١)

ثالثا ـ ان هذا العمود المشترك هو أصغر الابعاد المحصورة بين المستقيمين المفروضين وذلك لان كل مستقيم محصور بينهما غيره مثل ى هـ أطول من العمود ى ح المنزل من نقطة ى على المستوى م ن وحيث كان ى ح = ا ب يكون ى هـ > ا ب

الفصـــــل السابـــــع

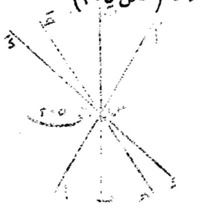
(فى الزوايا المجسمه)

تعـاريف

(٢٣٤) الزاوية المجسمة هى الشكل المتكون من جملة مستويات متقاطعة مثنى ومجتمعة فى نقطة واحدة وتقاطعات المستويات يحدث عنها مايسمى بأحرف المجسمة ونقطة اجتماعها هى رأسها والزوايا المستوية المتكونة بين الاحرف تسمى أوجه المجسمة

(٢٣٥) متى كان عدد أوجه الزاوية المجسمة ثلاثة وهو أقل ما يمكن يقال لها زاوية مجسمة ثلاثية ولم نعتبر من الزوايا المجسمة الا المحدب منها أى الموضوع فى جهة واحدة من امتداد أحد الاوجه

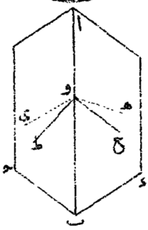
(٢٣٦) اذا فرضت الزاوية المجسمة الرباعية مثلا س ا ب ح ى (شكل ٢٠٥) ومدت الاحرف س ا و س ب و س ح و س ى جهة الرأس س فانه يتشكل من ذلك زاوية مجسمة رباعية أخرى س اَ بَ حَ ىَ يقال لها مماثلة للاولى أعنى ان زوايا المجسمة الجديدة زوجية كانت أو مستوية هى عين زوايا المجسمة الاولى لكنه لا يمكن انطباق احداهما على الاخرى لانه لو طبق الوجه ى س اَ على مساويه ى س ا بحيث تكون أحرف المجسمتين فى جهة واحدة من الوجه المشترك يشاهد ان الزوايا المستوية والزوجية من المجسمتين موضوعة على ترتيب معكوس



فائـــــدة

(٢٣٧) اذا أقيم من نقطة و المأخوذة على حرف الزاوية الزوجية ا ب العمود و ع على الوجه ا ح بحيث يكون هو والوجه ا ى فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا ح ثم أقيم منها العمود و ط على الوجه ا ى بحيث يكون هو والوجه ا ح فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا ى فان

الزاوية المستوية الحادثة ط و ح تكون مكملة للزاوية المستوية مقاس الزاوية الزوجية المعلومة (شكل ٢٠٦)

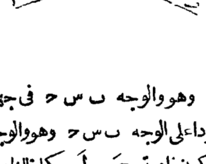


وللبرهنة على ذلك يمرر بالمستقيمين و ح و و ط العمودين على ا ب مستو فيكون ضرورة عمودا على ا ب ويقطع وجهى الزاوية الزوجية فى المستقيمين و هـ و و ى العمودين على الحرف ا ب وتكون الزاوية الحادثة مقاسا للزاوية الزوجية لكنه حيث كان و ح عمودا على الوجه ا د تكون زاوية ى و ح مساوية قائمة وبعين هذا السبب تكون زاوية هـ و ط قائمة كذلك واذن يكون

ى و ح + هـ و ط = ط و ح + ى و هـ = ٢ ق وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(٢٣٨) اذا أقيم من رأس زاوية مجسمة ثلاثية ثلاث أعمدة على أوجهها بحيث يكون كل واحد منها مع الحرف الثالث من المجسمة فى جهة واحدة بالنسبة للوجه المقام هو عمودا عليه فان الزاوية المجسمة الثلاثية الحادثة من هذه الاعمدة تكون مكملة للزاوية المجسمة المفروضة (ومعنى التكامل هنا هو أن تكون الزوايا المستوية من أيهما مكملة للزوجية من الثانية) (شكل ٢٠٧)



فاذا أقيم العمود س حَ على الوجه ا س ب وكان هو والحرف ح س فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ب ثم أقيم العمود س بَ على الوجـه ا س ح وكان هو والحرف س ب فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ح وأقيم العمـود س اَ على الوجه ب س ح وكان هو والحرف س ا فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ب س ح يقال

أولا ـ حيث كان س حَ عمودا على الوجه ا س ب وهو والوجه ب س ح فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ب وكان أيضا س اَ عمودا على الوجه ب س ح وهو والوجه ا س ح فى جهـة واحدة بالنسـبة للوجه ب س ح تكون زاوية حَ س اَ مكملة للزاوية المستوية التى تقاس بها الزوجية س ب (٢٣٧) وبمثـل ذلك يبرهن على أن زاوية اَ س بَ

مكملة للزاوية المستوية مقاس الزوجية س ح وان زاوية ت س حَ مكملة للزاوية المستوية مقاس الزوجية س ا

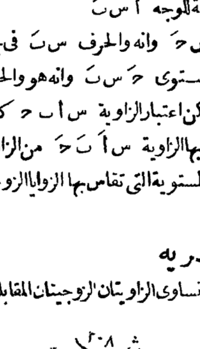
ثانيا ـ حيث كان س اَ عمودا على الوجه ب س ح فيكون عمودا على س ح وكذا حيث كان س تَ عمودا على الوجه ا س ح فيكون عمودا على س ح وبناء عليه يكون س ح عمودا على المستوى اَ س تَ وغير ذلك حيث كان س حَ عمودا على الوجه ا س ب وكان هو والحرف س ح فى جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ب تكون زاوية حَ س ح حادة وحيث قد ثبت ان س ح عمود على المستوى اَ س تَ ومكوّن مع س حَ زاوية حادة فيكون حينئذ هو والحرف س حَ فى جهة واحدة بالنسبة للوجه اَ س تَ

وبمثل ذلك يشاهد أن س ب عمود على المستوى اَ س حَ وانه والحرف س تَ فى جهة واحدة بالنسبة لهذا المستوى وان س ا عمود على المستوى حَ س تَ وانه هو والحرف س اَ فى جهة واحدة بالنسبة لهذا المستوى وحينئذ فيمكن اعتبار الزاوية س ا ب ح كأنها أنشئت من الزاوية س اَ تَ حَ بالطريقة التى أنشئت بها الزاوية س اَ تَ حَ من الزاوية س ا ب ح واذن فتكون زواياها المستوية مكملة للزوايا المستوية التى تقاس بها الزوايا الزوجية من المجسمة س اَ تَ حَ

دعوى نظـــــــريه

(٢٣٩) اذا تساوى وجهان من زاوية مجسمة ثلاثيـة يتساوى الزاويتان الزوجيتان المقابلتان لهما وبالعكس (شكل ٢٠٨)

ش ٢٠٨



أوّلا ـ ليكن الوجه ب س ا = الوجه ح س ا

ونطلب البرهنة على أن الزاوية الزوجيـة س ح تساوى الزاوية الزوجية س ب

وللوصول الى ذلك نضع بجانب المجسمة المفروضـة مماثلتها سَ حَ اَ تَ ثم نطبق الثانية على الاولى بأن نضع الزوجية سَ اَ على مساويتها س ا

وحيث ان الوجه اَ سَ حَ مساو للوجه ا س ح فيكون مساويا للوجه ا س ب واذن فينطبق الحرف سَ حَ على س ب وبمثل ما ذكر ينطبق الحرف سَ تَ على الحرف س ح وبذلك ينطبق المجسمتان على بعضهما وتكون الزاوية الزوجية سَ تَ مساوية للزاوية الزوجية س ح واذن تكون الزوجية س ب مساوية للزوجية س ح وهو المراد

ثانيا ـ لتكن الزوجية س ب مساوية للزوجية س ح وتطلب البرهنة على أن الوجه ب س ا مساو للوجه ح س ا

وللوصول الى ذلك نضع بجانب الجسمة الثلاثية المفروضة مماثلتها سَ حَ اَ بَ ثم نطبق الثانية على الاولى بان نضع الوجه حَ سَ بَ على مساويه ح س ب ومن حيث ان الزوجية سَ بَ مساوية للزوجية س ب وكانت هذه الاخيرة مساوية للزوجية س ح فرضا فتكون الزوجية سَ بَ مساوية للزوجية س ح واذن فيأخذ الوجه بَ سَ اَ اتجاه الوجه ح س ا ويمثل ماذكر يأخذ الوجه حَ سَ اَ اتجاه الوجه ب س ا وبذلك ينطبق الحرف سَ اَ على الحرف س ا وينطبق الجسمتان على بعضهما ويكون الوجه بَ سَ اَ المساوى للوجه ب س ا مساويا للوجه ا س ح أعنى أن الوجه ب س ا مساو للوجه ا س ح وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(٢٤٠) يتساوى الجسمتان الثلاثيتان اذا وجد فيهما واحد من الامور الآتية

أولا ـ اذا ساوى من احداهما زاوية زوجية والوجهان المحيطان بها لنظائرها من الثانية

ثانيا ـ اذا ساوى من احداهما وجه والزوجيتان المجاورتان له لنظائرها من الثانية

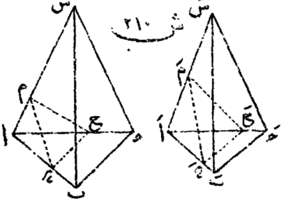
ثالثا ـ اذا تساوت فيهما الاوجه الثلاثة كل لنظيره

رابعا ـ اذا تساوت فيهما الزوايا الزوجية الثلاثة كل لنظيرتها

برهان الاول ـ (شكل ٢٠٩) تطبق احدى الجسمتين على الاخرى بالطريقة التى أجريت (بنمرة ٢٣٩) أولا

برهان الثانى ـ (شكل ٢٠٩) تطبق احدى الجسمتين على الاخرى بالطريقة التى أجريت (بنمرة ٢٣٩) ثانيا

برهان الثالث ـ (شكل ٢١٠) تؤخذ الاحرف الستة من الجسمتين متساوية ثم نصل



المستقيمات اح , اب و بح , أَحَ , أَبَ و بَحَ فالمثلثات المتساوية الساقين الحادثة فى المجسمة الاولى وهى اس ب , اس ح , ب س ح تكون مساوية لنظائرها من الثانية كما لايخفى واذن يكون المثلثان اب ح , أَبَ حَ متساويين لتساوى أضلاعهما الثلاثة المتناظرة اذا تقرر هذا ومررنا بالنقطة الاختيارية م من الحرف س ا مستويا عموديا على الحرف المذكور فانه يقطع الوجهين اس ح , اس ب فى المستقيمين م ع , م ء وتكون الزاوية ع م ء مقاس الزوجية س ا وغير ذلك فان المستقيم م ع لابد أن يقابل المستقيم اح لانه اذا وازاه تكون زاوية س اح قائمة وهذا ممنوع هنا لان المثلث س اح متساوى الساقين وبعين هذا السبب يقابل المستقيم م ء المستقيم اب ثم يوصل ع ء ويؤخذ بعد ذلك البعد أَمَ = ام ويجرى فى نقطة مَ عين ما أجرى فى نقطة م فتكون زاوية عَ مَ ءَ مقاس الزوجية أَسَ ويوصل عَ ءَ

فالمثلثان ع م ا , عَ مَ أَ متساويان لتساوى ضلع ومجاورتاه من الزوايا من احداهما النظائرها من الثانى وينتج من تساويهما أن اع = أَعَ , م ع = مَ عَ وبمثل ذلك يبرهن على أن اء = أَءَ , م ء = مَ ءَ أما المثلثان اع ء , أَعَ ءَ ففى أحدهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما مساوية لنظائرها من الثانى فيكونان متساويين وينتج من تساويهما أن ع ء = عَ ءَ واذن فالمثلثان ع م ء , عَ مَ ءَ متساويان لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما وحينئذ تكون زاوية ع م ء = عَ مَ ءَ أعنى أن الزوجية س ا تساوى الزوجية سَ أَ وبذلك فقد رجع الامر الى الحالة الاولى

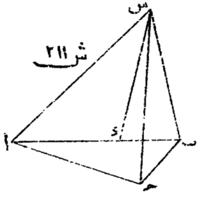
برهان الرابع — يقال لتكونا س , سَ المجسمتين الثلاثيتين المعلومتين , ط , طَ مكملتيهما فمن حيث ان الزوايا الزوجية من المجسمتين المعلومتين س , سَ متساويتان تكون الزوايا المستوية من مكملتيهما ط , طَ أو أوجههما المتناظرة متساوية (٢٣٨) غير أن تساوى الاوجه المتناظرة من المجسمتين ط , طَ يقتضى تساوى الزوايا الزوجية المتناظرة فيهما (الثالث) وهذا يستلزم تساوى الاوجه المتناظرة من المجسمتين الاصليتين س , سَ وهو المراد

تنبيه ١ — النظريات الثلاثة الاول من هذه الدعوى لها نظائر فى تساوى المثلثات دون النظرية الرابعة حيث قد علم أن تساوى زوايا مثلثين لايستلزم تساويهما بل يقتضى تشابههما فقط

تنبيه ٢ — اذا لم تكن الاجزاء المتساوية فى المجسمتين الثلاثيتين المعلومتين موضوعة على ترتيب واحد فلا تكون تلك المجسمات متساوية بل تكون متماثلة كما ذكر سابقا وفى مثل ذلك تجرى البراهين على احدى المجسمتين ومماثلتها

دعوى نظرية

(٢٤١) أى وجه أو زاوية مستوية من زاوية مجسمة ثلاثية أصغر من مجموع الوجهين الآخرين (شكل ٢١١)



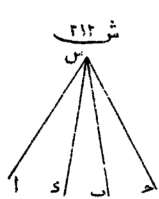
ليكن ا س ب الوجه الاكبر من المجسمة الثلاثية س وتطلب البرهنة على أنه أصغر من ا س ح + ح س ب ولذلك تؤخذ الزاوية ب س د من الزاوية الكبرى ب س ا مساوية لزاوية ب س ح ثم يمد المستقيم الاختيارى ب د ا ويؤخذ س ح = س د ويوصل ب ح و ا ح فالمثلثان ب س د و ب س ح متساويان لتساوى من أحدهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما لنظائرها من الثانى وينتج من تساويهما أن ب د = ب ح

لكن المثلث ب ح ا فيه ب ا أو ب د + د ا < ب ح + ح ا أو د ا < ا ح

ثم اذا قورن المثلثان ا س ح و ا س د ببعضهما نجد أن الضلعين ا س و س ح من أحدهما مساويان لنظيريهما من الثانى غير أنه لما كان الضلع الثالث من الاول وهو ا ح أكبر من نظيره ا د تكون زاوية ا س ح أكبر من زاوية ا س د وهو المراد

دعوى نظريه

(٢٤٢) الزاوية الزوجية الكبرى من أى زاوية مجسمة ثلاثية يقابلها الوجه الاكبر منها وبالعكس (شكل ٢١٢)



أولا — لتكن الزاوية الزوجية س ح من المجسمة الثلاثية س أكبر من الزوجية س ا وتطلب البرهنة على أن الوجه ا س ب أكبر من الوجه ب س ح

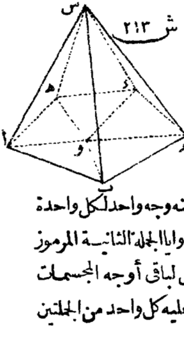
وللوصول الى ذلك يمر بالحرف س ح مستو يصنع مع الوجه ح س ا الزاوية الزوجية د س ح ا مساوية للزوجية س ا وهذا المستوى يقابل الوجه ا س ب فى المستقيم س د وبذلك يكون فى المجسمة الثلاثية الحادثة س ا د ح زاويتان زوجيتان متساويتان س ا و د س ح ا فيكون الوجهان المتقابلان لهما ح س د و د س ا متساويين

(٢٣٩ ثانيا) لكن المجسمة الثلاثية س ء ب ح فيها الوجه ح س ب < ح س ء + ب س ء أو ح س ب < ب س ا وهو المطلوب

ثانيا ـ اذا كان الوجه ا س ب أكبر من الوجه ب س ح يجب أن تكون الزوجية س ح أكبر من الزوجية س ا لانه ان لم يكن كذلك وكانت تساويها أو أصغر منها لزم أن يكون الوجه ا س ب اما مساويا للوجه ب س ح (٢٣٩ ثانيا) أو أصغر منه (أولا) وكلاهما مخالف للفرض

دعوى نظـــــرية

(٢٤٣) مجموع الزوايا المستوية لأى زاوية مجسمة (ثلاثية كانت أو كثيرة الاوجه) أصغر من أربع قوائم (شكل ٢١٣)



لذلك نقطع جميع أوجه المجسمة بمستو فيتشكل من خطوط تقاطعاته معها شكل كثير الاضلاع ا ب ح ء هـ فاذا فرضت نقطة و داخله ووصل منها الى رؤسه بمستقيمات فانه تتكون حولها مثلثات متحدة فى العدد مع المثلثات المجتمعة فى نقطة س غير أن بعض زوايا مثلثات الجملة الاولى المرموز له بالحرف و مجتمع حول نقطة و وبعضها الآخر المرموز له بالحرف ا يتركب منه وجه واحد لكل واحدة من الزوايا المجسمة الثلاثية ا و ب و ح و ء و هـ وكذا بعض زوايا الجملة الثانيـة المرموز له بالحرف س مجتمع حول نقطة س وبعضها الآخر ب مكمل لباقى أوجه المجسمات ا و ب و ح و ء و هـ ولما كان مجموع الزوايا القائمة المشتمل عليه كل واحد من الجملتين واحدا يحدث و + ا = س + ب

وحيث ان المجموع ا أصغر من المجموع ب (٢٤١) يجب أن يكون المجموع و أكبر من المجموع س أعنى أن الزوايا المستوية المجتمعة فى نقطة س أقل من أربع قوائم

دعوى نظـــــرية

(٢٤٤) مجموع الزوايا الزوجية لاى زاوية مجسمة ثلاثية أكبر من قائمتين وأصغر من ست قوائم واذا أضيف قائمتان الى أصغر الزوايا الزوجية كان المجموع أكبر من مجموع الزاويتين الزوجيتين الباقيتين

أولا ـ اذا كان أَ ، بَ ، حَ رموزا الزوايا الزوجيـة للجسمة الثـلاثية المعـلومة ، أ ، ب ، ح رموزا للزوايا المسـتوية للجسمة الثلاثية المكملة للجسمة المعـلومة حدث

أَ = ٢ ق — أ ، بَ = ٢ ق — ب ، حَ = ٢ ق — ح أو

أَ + بَ + حَ = ٦ ق — (أ + ب + ح)

وحيث ان المجموع أ + ب + ح أكبر من صفر وأصغر من أربع قوائم (٢٤٣) فيكون أَ + بَ + حَ أصغر من ست قوائم وأكبر من قائمتين

ثانيا ـ اذا كانت أَ أصغر الزوايا الزوجيـة تكون أوجه الجسمة المكملة هى ٢ ق — أَ ، ٢ ق — بَ ، ٢ ق — حَ ويكون الوجه ٢ ق — أَ هو أكبرها وعلى مقتضى ماتقدم (٢٤١) يحدث

٢ ق — أَ < ٢ ق — بَ + ٢ ق — حَ

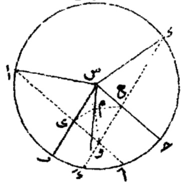
وبضم أَ + بَ + حَ الى طرفى المتباينة وطرح قائمتين منهما يحدث

بَ + حَ < ٢ ق + أَ وهو المراد

دعوى نظـــــرية

(٢٤٥) لامكان تشكيل زاوية مجسمة ثلاثية بثلاث زوايا مستوية معلومة يجب ويكفى أن يكون مجموعها أقل من أربع قوائم وأن تكون كبراهـا أصـغر من مجموع الاثنتين الاخريين (شكل ٢١٤)

ش ٢١٤



قد علم مما سبق (٢٤٣) و (٢٤١) لزوم هذين الشرطين والآن نبرهن على كفاءتهما

لتكن ب س ح ، أ س ب ، ء س ح الزوايا الثلاثة المعلومة فنفرض أنها موضوعة فى مستو واحد وأن الزاوية ب س ح هى الكبرى فنجعل نقطة س مركزا وبنصف قطر اختيارى يرسم محيط دائرة وينزل من النقطتين أ ، ء العمودين أأَ ، ءءَ على الضلعين س ب ، س ح فمن حيث ان الزاوية ب س ح هى الكبرى فيكون القوس ب ح أكبر من كل واحد من القوسين أ ب ، ء ح ولكون القوس أ ب = القوس ب أَ يجب أن تقع نقطة أَ

* داخل القوس ب ح أى بين النقطتين ب و ح وبمثل ذلك يعلم وقوع نقطة دَ بين
* النقطتين المذكورتين
* لكنه حيث كانت زاوية ب س ح < ا س ب + ح س د يجب أن يكون
* ب ح < ا ب + ح د وحيث كان أيضا ب اَ = ب ا , ح دَ = ح د فلابد أن تقع
* نقطة اَ على يمين دَ
* وكذا حيث كان مجموع الزوايا الثلاثة المعلومة أقل من أربع قوائم فتكون نقطة د موضوعة
* بعد نقطة ح فى الاتجاه ا ب ح على المحيط الذى يكون مبدؤه نقطة ا واذن فتوجد
* نقطة دَ بين النقطتين اَ و ا وتوجد نقطة اَ بين النقطتين دَ و د واذن فيتقاطع
* الوتران ا اَ و د دَ داخل محيط الدائرة
* اذا تقرر هذا يقام من نقطة و العمود و م على المستوى ب س ح ثم يرسم فى المستوى
* ى و م محيط دائرة مركزه ى ونصف قطره ا ى فيقطع و م فى نقطة م ثم يوصل
* م س فتتشكل من ذلك الزاوية المجسمة الثلاثية المعلومة
* لانه اذا وصل م ى و م ع فالمثلثان القائما الزاوية ا س ى و م ى س فيهما س ى
* مشترك بينهما والضلع ا ى = ى م واذن فيكونان متساويين وينتج من تساويهما أن
* زاوية ا س ى = زاوية ى س م ومثلهما المثلثان القائما الزاوية م س ع و د س ع
* لان فيهما س ع مشترك بينهما والضلع س د = س م لان كل واحد منهما مساو للضلع
* س ا فيكونان متساويين وينتج من تساويهما أن زاوية م س ع = د س ع

دعوى نظـــــــرية

* (٢٤٦) يجب ويكفى لتشكيل زاوية مجسمة ثلاثية بثلاث زوايا زوجية معلومة أن يكون
* مجموعها محصورا بين قائمتين وست قوائم وانه لو اضيف قائمتان لاصغر هذه الزوايا كان الناتج
* أكبر من مجموع الزاويتين الزوجيتين الاخريين
* قد سبقت البرهنة (بنمرة ٢٤٤) بضرورة لزوم هذين الشرطين لتشكيل الزاوية المجسمة
* الثلاثية وأما الآن فلم نتكلم الا ببيان كفاءتهما فنقول انه متى توفر هذان الشرطان فانه يمكن
* تشكيل المجسمة الثلاثية المكملة للزاوية المجسمة المطلوبة بواسطة الاوجه ٢ ق ــ اَ
* و ٢ ق ــ بَ و ٢ ق ــ حَ واذن فيتيسر تشكيل الزاوية المجسمة الثلاثية بواسطة
* ثلاث زوايا زوجية

الفصل الثامن

تمرينات

١ – هل يتعين وضع مستو بجزء من منحن معلوم

٢ – اذا أنزل من نقطة خارج مستو عمود عليه طوله ٣ متر ومائل طوله ٤ متر والمطلوب تعيين طول مسقط هذا المائل على المستوى

٣ – اذا فرضت نقطة متباعدة عن مستو ببعد ٨ متر ورُكِز فيها ورسم محيط دائرة على هذا المستوى وكان نصف قطره فيه ٦ متر والمطلوب تعيين بعد النقطة المذكورة عن أى نقطة من نقط محيط الدائرة

٤ – اذا رسمت دائرة فى مستو مسطحها ٢٠ مترا مربعا وفرضت نقطة خارجة عنه وعلى العمود القائم من مركز الدائرة وكانت متباعدة عن نقط محيطها ببعد ١٥ مترا والمطلوب تعيين بعدها عن مركز الدائرة

٥ – المطلوب تعيين محل النقط الفراغية المتساوية البعد عن نقطتين معلومتين

٦ – المطلوب تعيين فى الفراغ محل النقط المتساوية البعد عن ثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة

٧ – المطلوب تعيين فى مستو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة خارجة عنه

٨ – المطلوب البرهنة على أن أجزاء المستقيمين المحصورة بين مستويات متوازية هى متناسبة

٩ – المطلوب البرهنة على أنه اذا قطع مستو مستويين متوازيين تكون الزوايا الزوجية المتبادلة متساوية والمتناظرة كذلك والمجاورة للمستوى القاطع متكاملة

الباب الثانى

(فى الكرة)

تعاريف

(٢٤٧) الكرة هى جسم محاط بسطح منحن جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا ويسمى هذا السطح المنحنى بسطح الكرة

اذا تصورنا دوران نصف دائرة حول قطرها فانه يتولد من ذلك جسم الكرة وأما نصف المحيط فانه يتولد منه سطحها واذن فالكرة هى جسم تحركى وسطحها كذلك

(٢٤٨) كل مستقيم يمر بمركز الكرة وينتهى بنقطة من سطحها يسمى نصف قطر الكرة وأما اذا انتهى بنقطتين من سطحها فانه يسمى قطرا

وعلى مقتضى تعريف الكرة تكون أقطارها متساوية وأنصاف أقطارها كذلك وكل كرتين متحدتين فى المركز وفى القطر يتحدان معا

اذا دارت كرة حول مركزها بأى طريقة فان سطحها ينطبق دائما على نفسه وحينئذ فأى جزء من كرة يمكن انطباقه على أى جزء آخر منها أو من غيرها تكون متحدة مع الاولى فى المركز وفى نصف القطر

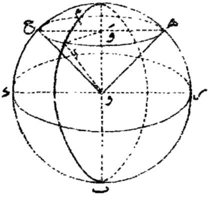
(٢٤٩) المستوى المماس لسطح الكرة هو الذى لا يشترك معها الا فى نقطة واحدة

الفصل الاول

(فى القطع المستوى للكرة)

دعوى نظرية

(٢٥٠) اذا قطعت الكرة بمستو فان القطع الحادث يكون دائرة (شكل ٢١٥)



ليكن هـ ع المستوى القاطع و هـ م ع القطع الحادث فى الكرة فينزل من المركز و العمود و وَ على المستوى القاطع هـ ع ثم نصل نقطتى و و وَ بكل واحدة من النقط ع و م و هـ ... الخ فمن حيث ان المستقيمات وع و وم و وهـ و الخ متساوية لكونها أنصاف أقطار فتكون أبعادها عن نقطة وَ موقع العمود متساوية

وبناء عليه تكون جميع نقط القطع على أبعاد متساوية من نقطة وَ وبذلك يكون محيط دائرة مركزه وَ

تنبيه ـ البرهان المتقدم لا يوافق الحالة التى يمر فيها المستوى القاطع بمركز الكرة غير أنه يسهل مشاهدة أن جميع نقط هذا القطع على أبعاد متساوية من المركز وكل بعد منها مساو نصف قطر الكرة واذن فيكون القطع دائرة لكنه حيث ان وو َ > وح أمكن أن يسمى كل قطع مار بمركز الكرة بدائرة عظيمة وكل قطع لم يمر بمركزها بدائرة صغيرة

نتيجة ١ ـ اذا جعل س رمزا لنصف قطر الكرة و سَ رمزا لنصف قطر أى دائرة صغيرة و ء رمزا لبعد مستوى هذه الدائرة الصغيرة عن مركز الكرة تحصل س٢ = سَ٢ + ء٢ وهو ارتباط يمكن أن يستنتج منه النظريتان الآتيتان

الاولى ـ فى كرة واحدة أو فى كرات متساوية الدوائر الصغيرة المتساوية أبعاد مستوياتها عن مركز الكرة متساوية وبالعكس

الثانية ـ فى كرة واحدة أو فى كرات متساوية أصغر الدوائر الصغيرة ما كان بعد مستويها عن مركز الكرة أطول وبالعكس

نتيجة ٢ ـ لا يمكن أن يقابل المستقيم سطح الكرة فى أكثر من نقطتين لانه لا يقابل الدائرة الحادثة من قطع الكرة بمستو مشتمل عليه فى أكثر من نقطتين

نتيجة ٣ ـ أى دائرتين عظيمتين فى كرة واحدة متساويتان ويتقاطعان فى قطر ينصف كل واحدة منهما

نتيجة ٤ ـ أى نقطتين مفروضتين على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بهما الا قوس واحد من دائرة عظيمة وذلك لان مستوى الدائرة العظيمة يتعين بنقطتين من سطح الكرة وبمركزها

نتيجة ٥ ـ أى ثلاث نقط مفروضة على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بها الا محيط دائرة واحد وذلك لان هذه النقط لما لم تكن على استقامة واحدة فلا يتعين بها الا مستو واحد وأما أى نقطتين فانه يمكن أن يمر بهما مقدار لا نهائى من أقواس الدوائر الصغيرة

نتيجة ٦ ـ كل دائرة عظيمة تقسم الكرة الى قسمين متساويين

تعريف

(٢٥١) قطبا الدائرة هما نقطتا تقابل قطر الكرة العمودى على مستوى الدائرة بسطح الكرة فالنقطتان ا و ب (شكل ٢١٥) هما قطبا الدائرة هـ م ح

دعوى نظـــــرية

(٢٥٢) قطب أى دائرة على أبعاد متساوية من نقط محيطها (شكل ٢١٥)
لذلك نصل أحد القطبين ا أو ب الى جميع نقط محيط الدائرة صغيرة كانت أو عظيمة ثم يقال حيث ان جميع هذه المستقيمات هى موائل قد افترقت بابعاد متساوية عن موقع العمود اوَ أو وب فتكون متساوية واذن تكون أقواس الدوائر العظيمة الموترة بها كذلك

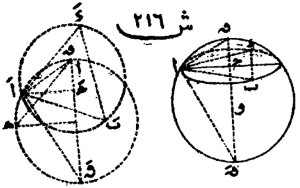
تنبيه — يطلق اسم نصف القطر الكروى للدائرة هـ م ع على قوس الدائرة العظيمة ا م وكل دائرة مرسومة على سطح الكرة مثل هـ م ع يمكن اعتبار تولدها من دوران نقطة م نهاية القوس ا م حول نقطة ا ولذا نعتبر نقطة ا كأنها مركز الدائرة والقوس ا م نصف قطرها واذن فلكل دائرة مرسومة على سطح الكرة مركزان على سطحها ونصفا قطرين كرويين متكاملان نصفا القطرين الكرويين لاى دائرة عظيمة يكونان متساويين ومقدار كل واحد منهما ربع محيط دائرة عظيمة

نتيجة — يمكن بواسطة برجل ذى فرعين غير متساويين مصنوع صناعة مناسبة رسم محيط دائرة على سطح الكرة مع السهولة التى بها يرسم المحيط المذكور على مستو انما اذا كانت الدائرة التى يراد رسمها عظيمة فان فتحة البرجل يجب أن تكون مساوية لضلع المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها مساو نصف قطر الكرة

دعوى عمليـــــة

(٢٥٣) المطلوب تعيين نصف قطر كرة لا يمكن الدخول فيها (شكل ٢١٦)
نعتبر نقطة ما ى من سطح الكرة كأنها قطب ومنها نرسم محيط الدائرة ا ب د ثم نتصور مد القطر ى و ىَ العمودى على مستوى هذه الدائرة وليكن ح مركزها ثم نصل نقطة ما من نقط المحيط ا الى النقط ى و ىَ و ح فاذا أمكن رسم المثلث ى ا ىَ القائم

ش ٢١٦



الزاوية فانه يتوصل الى معرفة نصف القطر بواسطة أخذ نصف البعد ى ىَ وتصير المسئلة اذن محاولة

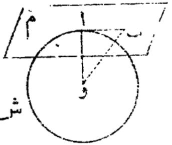
وللوصول الى ذلك نعين على محيط الدائرة النقط الثلاثة ا و ب و ى وبواسطة قياس الاوتار اب و ب ى و ى ا يرسم المثلث اَ بَ ىَ مساويا للمثلث ا ب ى ويرسم عليه محيط دائرة فيكون نصف قطره اَ حَ مساويا نصف القطر ا ح ثم يرسم بعد ذلك المثلث ح ا ن القائم الزاوية حيث يعلم منه الضلع ا ح والوتر ا ن ثم يقام من نقطة اَ عمود على الضلع ا ن ويمد حتى يتلاقى مع امتداد ن ح فيتعين بذلك ن نَ

نتيجة ـ متى تعين نصف قطر الكرة فانه يمكن أن يرسم به دائرة عظيمة على مستوى العمل وبذلك يمكن أن يتوصل الى مقدار طول ضلع المربع المرسوم داخلها الذى يحتاج اليه الامر عندما يراد رسم دائرة عظيمة

دعوى نظـــــرية

(٢٥٤) المستوى العمودى على نهاية نصف قطر الكرة يكون مماسا لها وبالعكس (شكل ٢١٧)

أولا ـ ليكن م مستويا عموديا على نهاية نصف القطر و ا فن حيث ان كل مستقيم مثل ب و يكون مائلا على المستوى م فيكون أطول من العمود وبذلك تكون نقطة ب خارجة عن سطح الكرة واذن فلا يشترك المستوى م مع سطحها الا فى نقطة ا


ش ٢١٧

ثانيا ـ اذا كان م مستويا مماسا لسطح الكرة أى لا يشترك معها الا فى نقطة ا فكل مستقيم مثل و ب يكون أطول من البعد و ا لان نقطة ب خارجة عن سطح الكرة واذن فالمستقيم و ا أصغر جميع المستقيمات التى يمكن مدها من نقطة و الى المستوى م وبناء عليه فيكون عمودا على المستوى وهو المراد

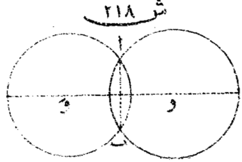
نتيجة ـ كل نقطة مفروضة على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بها الا مستو واحد مماس لسطح الكرة

دعوى نظـــــرية

(٢٥٥) خط تقاطع سطحى كرتين هو محيط دائرة يكون مستويه عمودا على المستقيم الواصل بين مركزيهما وأما مركزه فهو موجود على المستقيم المذكور (شكل ٢١٨)

ليكونا و و وَ مركزى الكرتين فنتوهم مرور مستو ما بالمستقيم المار بالمركزين فيقطع الكرتين

فى دائرتى و و وَ المتقاطعتين ويكون فيهما الوتر المشترك اب عمودا على المستقيم الواصل بين المركزين ومنقسما به الى قسمين متساويين

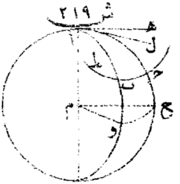


فاذا تصورنا الآن دوران الدائرتين حول و وَ فان سطحى الكرتين يتولدان من دوران المحيطين وأما الاوضاع المختلفة للمستقيم اب فانه يتولد منها مستو عمودى على و وَ وأما النقطتان المتطرفتان ا و ب فانهما يرسمان فى أثناء هذه الحركة محيط دائرة مركزه موجود على و وَ وهو المراد

تنبيه [illegible] لريات التى سبق ايرادها فى الباب الثانى من الجزء الاول بخصوص أوضاع الدوائر بالنسبة لبعض [illegible] يمكن تطبيقها هنا أيضا على الكرتين

دعوى نظـــــرية

(٢٥٦) الزاوية الواقعة بين قوسى دائرتين عظيمتين تقاس بقوس الدائرة العظيمة الذى يكون قطبه رأس الزاوية ونصف قطره ربع محيط دائرة عظيمة (شكل ٢١٩)



يطلق اسم الزاوية الواقعة بين قوسى دائرتين عظيمتين على الزاوية الزوجية [illegible] مستويهما وتقدم بنمرة (٢٢٤ [illegible]) [illegible] ـة تقاس بزاوية العمودين يفرض [illegible] ـاس بزاوية العمودين التى مقدارها [illegible]

فاذا اعتبرنا رأس الزاوية ا [illegible] ا ورسمنا محيط دائرة ح و بنصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة فان مستويه يكون عمودا على الحرف ا م للزاوية الزوجية الواقعة بين المستويين المارين بقوسى الدائرتين العظيمتين ويقطع هذين المستويين فى المستقيمين م ح و م و المتكون بينهما زاوية العمودين للزاوية الزوجية المذكورة وحيث ان هذه الزاوية المستوية تقاس بالقوس ح و المحصور بين ضلعيها تكون زاوية القوسين كذلك وهو المراد

تنبيه ـ ويمكن أيضا اعتبار زاوية المماسين اهـ و ال المخرجين من نقطة ا ومماسين لقوسى الدائرتين العظيمتين مقاسا لزاوية القوسين المذكورين

الفصل الثانى

(فى المثلثات وكثيرى الاضلاع الكروية)

تعاريف

* (٢٥٧) المثلث الكروى هو جزء من سطح الكرة محصور بين ثلاث أقواس دوائر عظيمة
* يجب أن نعتبر دائما عند دراسة المثلثات الكروية أن يكون أى ضلع من أضلاعها أصغر من
* نصف محيط

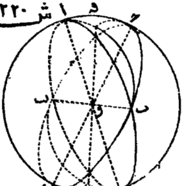
* يتركب المثلث الكروى من ستة أجزاء ثلاثة أضلاع أَ و بَ و حَ وثلاث زوايا
* ا و ب و ح مقابلة لها

* (٢٥٨) كثير الاضلاع الكروى هو جزء من سطح الكرة محاط بجملة أقواس دوائر عظام
* متقاطعة مثنى ويقال له محدب متى كان موجودا بتمامه فى احدى نصفى الكرة المحددين
* بامتداد أحد أضلاعه

* أى ضلع من أى كثير أضلاع كروى محدب أصغر دائما من نصف محيط دائرة عظيمة لانه لو فرض
* أن أحد أضلاعه يزيد عن ذلك فانه لا يتأتى وجود الشكل بتمامه فى احدى نصفى الكرة
* المحددين بامتداد أحد الضلعين المجاورين للضلع المذكور وبناء عليه لا يكون الشكل محدبا

دعوى نظرية

* (٢٥٩) كل كثير أضلاع كروى يقابله آخر مرسوم على سطح الكرة تكون أجزاؤه مساوية
* أجزاء الاول غير أنها موضوعة فى ترتيب مغاير لوضع ترتيبها فى الاول (شكل ٢٢٠)



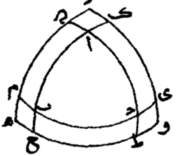
* فاذا وصل بين المركز و وبين رؤس الشكل بمستقيمات
* ومدت على استقامتها من الجهة الاخرى حتى تلاقى سطح
* الكرة فانه يتشكل من ذلك كثير أضلاع كروى جديد اذا قورن
* بالشكل الاول نجد فيهما الاضلاع متساوية لانها مقاييس
* زوايا متساوية لتساوى الزوايا الزوجية المتقابلة بالحرف (٢٢٧
* ثالثة) غير أننا نجد اختلافا فى ترتيب وضع الاضلاع والزوايا
* فيهما وهو أمر يسهل بيانه لانه من المعلوم اذا أريد ترتيب أجزاء أى كثير أضلاع كروى فانه

* يتبع السير على محيطه وعلى سطح الكرة بدون الدخول فيها متجها دائما نحو جهة معينة
* ولتكن من الشمال الى اليمين مثلا ثم نمر أجزاءه على حسب ترتيب المرور عليها
* اذا تقرر هذا واعتبرنا أن وضع النقط الثلاثة للمثلث ا ب ح هو طردى ظهر لنا أن النقط
* المناظرة لها فى المثلث اَ بَ حَ مغايرة لها فى الوضع لان الانتقال من نقطة ا الى ب يقتضى
* الصعود فوق مستوى العمل بخلاف الانتقال من اَ الى بَ فانه يقتضى الهبوط تحته
* تنبيه ـ كل كثيرى أضلاع كرويين متماثلين لايمكن انطباقهما على بعضهما لانه لو أمكن
* ذلك للزم انطباق الاجزاء المتساوية المتحدة الاسم على بعضها وهذا يقتضى اتحادهما فى ترتيب
* الوضع وهو مخالف للغرض

دعوى نظرية

* (٢٦٠) اذا أنشئنا مثلثا كرويا تكون رؤسه أقطابا لاضلاع مثلث كروى معلوم بحيث
* يكون بعد كل واحد من هذه الاقطاب عن الرأس المقابل له من المثلث المفروض أقل من ربع
* محيط دائرة عظيمة فانه يتكون مايسمى بالمثلث القطبى للمثلث الاول ويحدث
* أولا ـ ان المثلث المعلوم يكون مثلثا قطبيا للمثلث المنشأ
* (شكل ٢٢١)
* ثانيا ـ ان كل زاوية من أحد المثلثين تكون مكملة للضلع
* المناظر لها من المثلث الثانى
* قبل البرهنة على هذه النظرية نذكر الفائدة الآتية

ش ٢٢١



فائدة

* كل نقطة مفروضة على سطح الكرة بين محيط دائرة عظيمة وقطبها أى موجودة معها فى نصف
* كرة واحد يكون بعدها عن هذا القطب أقل من ربع محيط دائرة عظيمة وبالعكس اذا كان
* البعد بين نقطتين على سطح الكرة أقل من ربع محيط دائرة عظيمة وكانت احداهما قطبا لمحيط
* دائرة عظيمة تكون النقطتان المذكورتان موجودتين فى نصف كرة واحد من نصفيها المحددين
* بمحيط الدائرة العظيمة المذكورة
* ولاتحتاج هذه الفائدة الى البرهنة عليها لبداهتها لما هو معلوم من أن بعد قطب أى دائرة
* عظيمة عن أى نقطة من نقطها هو ربع محيط دائرة عظيمة

* اذاتقرر هذا يقال اذا كان ا ب ح هو المثلث الكروى المعلوم فن حيث ان قطب الضلع
* ب ح يجب أن يكون متباعدا عن كل واحدة من النقطتين ب و ح بمقدار ربع محيط
* دائرة عظيمة فيتعين اذن بواسطة أن يركز في كل واحدة من هاتين النقطتين وببعد مساو لربع
* محيط دائرة عظيمة برسم قوسا محيطى دائرتين عظيمتين د هـ و د و يتقاطعان في نقطتين
* نأخذ احداهما د الموجودة في جهة واحدة مع النقطة ا بالنسبة للقوس ب ح ثم اذا
* أجرى عمل مشابه لذلك في تعيين النقطتين هـ و و قطبى الضلعين ا ح و ا ب فانه
* يتشكل من ذلك المثلث القطبى د هـ و

* برهان الاول ـ يقال حيث ان نقطة ا متباعدة عن النقطتين و و هـ من قوس
* الدائرة العظيمة و هـ بمقدار ربع محيط دائرة عظيمة فتكون اذن قطبا للقوس و هـ وزيادة
* على ذلك حيث ان البعد بين ا و د أقل من ربع محيط دائرة عظيمة على مقتضى ماذكر
* بالفائدة وكانت ا قطبا القوس هـ و فتكون هى ونقطة د في نصف الكرة المحدد
* بالقوس هـ و واذن فيكون المثلث ا ب ح قطبيا للمثلث د هـ و أعنى أن المثلث ا ب ح
* يمكن ايجاده من المثلث د هـ و بالطريقة التى استعملت لايجاده من المثلث ا ب ح

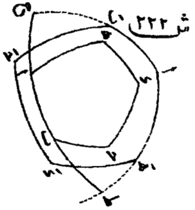
* برهان الثانى ـ يقال من المعلوم أن زاوية ا تقاس بالقوس ح ط وأن ح ط + هـ و
* = (ح و ـ ط و) + (هـ ط + ط و) = ح و + هـ ط يساوى ربعى محيط دائرة عظيمة
* أى يساوى قائمتين وهو المراد

* تنبيه ـ يمكن مطابقة هذه النظرية مع التى تقدم ذكرها للزوايا المجسمة الثلاثية (٢٣٨)
* وذلك لانا لو وصلنا مركز الكرة م بجميع رؤس المثلثين فانا نحصل على المجسمتين الثلاثيتين
* م ا ب ح , م د هـ و ونظرا لتعريف القطب يكون م د عمودا على المستوى ب ح م
* وعلى مقتضى شرط انتخاب القطب د يكون هو ونقطة ا في جهة واحدة بالنسبة
* للوجه ب ح م وحينئذ تكون المجسمة م د هـ و مكملة للمجسمة م ا ب ح ويمكن
* أن يقال من الآن على وجه العموم أن كل نظرية من نظريات المثلثات الكروية أو المضلعات
* الكروية يقابلها نظرية مطابقة لها على المجسمات الثلاثية أو على المجسمات كثيرة الاوجه

* دعوى نظـــــرية

* (٢٦١) اذا أنشأنا كثير أضلاع كروى تكون رؤسه أقطابا لكثير أضلاع كروى محدب
* بحيث يؤخذ كل واحد من هذه الاقطاب بالنسبة للضلع المقابل له في نصف الكرة المشتملة على

* كثير الاضلاع المعلوم فانه يتشكل من ذلك مضلع كروى قطبى للمضلع الكروى المحدب المعلوم
* ويحدث
* أولا – ان كثير الاضلاع المعلوم يكون قطبيا لكثير الاضلاع المنشأ (شكل ٢٢٢)
* ثانيا – ان زوايا أحدهما تكون مكملة للاضلاع
* المناظرة لها من الثانى

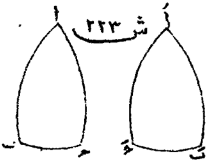


* ليكن ا ب ح ء ه مضلعا كرويا محدبا معلوما
* ثم اعتبرنا نقطة اَ احدى قطبى القوس ب ا
* الموجود معه فى نصف الكرة المحدد بامتداد القوس
* اب والموجود به النقط ه ، ء ، ح بمعنى أن
* بعد نقطة اَ عن كل واحدة من هذه النقط الثلاثة
* أقل من ربع محيط دائرة عظيمة واستمرينا على هذا المنوال فى سائر الاقطاب بَ و حَ
* و ءَ و هَ فانه يتكون من ذلك المضلع القطبى اَ بَ حَ ءَ هَ بواسطة وصل هذه
* الاقطاب ببعضها باقواس دوائر عظام
* برهان الاول – يقال حيث ان نقطة ا مشتركة بين القوسين ا ب ، ا ه فيكون
* بعدها عن كل واحدة من النقطتين اَ ، هَ مساويا ربع محيط دائرة عظيمة وحينئذ
* فتكون قطبا لقوس الدائرة العظيمة اَ هَ وزيادة على ذلك حيث ان بعد نقطة اَ عن كل
* واحدة من النقط ه و ء و ح أقل من ربع محيط دائرة عظيمة بناء على انتخاب الاقطاب
* اَ و بَ و حَ و ءَ و هَ فيكون كثير الاضلاع ا ب ح ء ه قطبيا لكثير الاضلاع
* اَ بَ حَ ءَ هَ بمعنى ان كثير الاضلاع ا ب ح ء ه يمكن ايجاده من كثير الاضلاع
* اَ بَ حَ ءَ هَ بالطريقة التى استعملت لايجاده من كثير الاضلاع ا ب ح ء ه
* برهان الثانى – يقال اذا مد القوس ا ب حتى يقابل القوسين اَ هَ و اَ بَ فى
* النقطتين ط و ع فان الزاوية اَ تقاس بالقوس ع ا ب ط غير أن
* ا ب + ع ط = (ع ب – ع ا) + (ا ط + ا ع) = ع ب + ا ط
* تساوى ربعى محيط دائرة عظيمة أى تساوى قائمتين وهو المراد
* نتيجة – يتوصل بهذه النظرية الى طريقة تغيير شكل على سطح الكرة وأما الشكلان
* ا ب ح ء ه و اَ بَ حَ ءَ هَ فهما موجودان بحيث ان كل رأس من أحدهما يقابلها ضلع
* من الآخر وبالعكس وحينئذ فيمكن اعتبار تسمية أحد هذين الشكلين بالآيل القطبى للثانى

* تنبيـــه ـ وكان يمكن ايراد نظرية مقابلة لهذه فى الباب الاول من هـــذا الجزء على الزوايا
* المجسمة الكثيرة الاوجه لا تختلف عنها الا فى الصورة فقط

* دعوى نظـــــــرية

* (٢٦٢) كل مثلث كروى متساوى الساقين زاويتاه المقابلتان لساقيه متساويتان وبالعكس
* (شكل ٢٢٣)


ش ٢٢٣

* اذا كان الضلع ا ب = ا حـ تكون زاوية
* ب = حـ وبالعكس
* برهان الاول ـ نضع بجانب المثلث ا ب حـ
* مماثله اَ حَ بَ ثم نطبقه عليـــه بأن نضع
* الزاوية اَ على مساويتها ا فتقع نقطة
* حَ على ب ونقطة بَ على حـ وينطبق حينئذ بَ حَ على حـ ب (٢٥٠ نتيجة ٤)
* وينطبق المثلثان على بعضهما وتكون زاوية بَ = حـ وحيث كانت زاوية بَ = ب
* تكون زاوية ب = حـ وهو المراد
* برهان الثانى ـ يقال انه يسهل البرهنة على هـــذه النظرية بواسطة التطبيق غير أنه يمكن
* البرهنة عليها أيضا بواسطة الآتى القطبى فيقال اذا كان اَ بَ حَ هو المثلث القطبى للمثلث
* ا ب حـ فمن حيث ان الزاويتين ب و حـ متساويتان يكون الضلعان اَ بَ , اَ حَ
* من المثلث القطبى متساويين وعلى مقتضى الحالة الاولى من هـــذه النظرية تكون زاوية
* بَ = حَ وحيث ان هاتين الزاويتـــين متساويتان يكون الضلعان ا حـ , ا ب من
* المثلث ا ب حـ القطبى للمثلث اَ بَ حَ متساويين وهو المراد

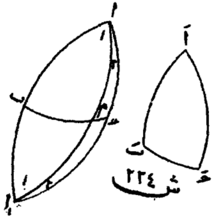
* دعوى نظـــــــرية

* (٢٦٣) يتساوى المثلثان الكرويان المرسومان على كرة واحدة أو على كرات متساوية اذا وجد
* فيهما واحد من الامور الآتية
* أولا ـ اذا ساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بها النظائرها من الثانى
* ثانيا ـ اذا ساوى من أحدهما ضلع والزاويتان المجاورتان له لنظائرها من الثانى
* ثالثا ـ اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة المتناظرة
* رابعا ـ اذا تساوت فيهما الزوايا المتناظرة

برهان الاول ـ يقال نطبق أحد المثلثين على الآخر كما أجرى ذلك بنمرة (٢٦٢) أولا

برهان الثانى ـ يقال انه يمكن البرهنة على هذه النظرية بواسطة التطبيق غير أنه يمكن ترجيعها الى الحالة الاولى بواسطة الآيل القطبي فيقال اذا كان ا١ ب١ ح١ و ا'١ ب'١ ح'١ المثلثين القطبيين للمثلثين ا ب ح و ا' ب' ح' الاصليين فمن حيث انه يوجد فى أحد المثلثين الاصليين ضلع ومجاورتاه من الزوايا مساوية لنظائرها من الثانى يكون فى أحد المثلثين القطبيين لهما زاوية والضلعان المحيطان بها مساوية لنظائرها من المثلث القطبي الثانى وعلى مقتضى ما ذكر فى الحالة الاولى يكون المثلثان القطبيان متساويين وينتج من تساويهما تساوى باقى الاجزاء فيهما أعنى أن الضلع والزاويتين المجاورتين له الباقية من المثلث القطبي الاول مساوية لنظائرها من الثانى وهذا يستلزم تساوى باقى الاجزاء فى المثلثين الاصليين وهو المطلوب

برهان الثالث ـ يقال (شكل ٢٢٤) نضع المثلث ا' ب' ح' تحت المثلث ا ب ح بحيث ينطبق الضلع ب' ح' على مساوية ب ح فيتكون من ذلك الشكل الرباعى ا ب ا' ح ثم نصل بين ا و ا' بقوس دائرة عظيمة فالمثلث ا ح ا' فيه الضلعان ا ح و ح ا' متساويان لان كل واحد منهما يساوى الضلع ا' ح' فتكون الزاويتان ح ا ا' و ا ا' ح متساويتين وكذا ينتج من المثلث ا ب ا' أن زاوية م ا ب = م ا' ب وإذن فتكون زاوية ح ا ب = ح ا' ب لانهما مجموع زاويتين متساويتين (وقد يتأتى أن يكونا فاصل زاويتين متساويتين) وبناء عليه يكون فى أحد المثلثين زاوية والضلعان المحيطان بها مساوية لنظائرها من الثانى فيكونان متساويين (أولا)



ش ٢٢٤

برهان الرابع ـ يقال انه يتوصل الى اثبات هذه النظرية بواسطة الآيل القطبي وذلك لانه حيث كانت الزوايا متساوية فى المثلثين ا ب ح و ا' ب' ح' المعلومين فتكون أضلاع مثلثيهما القطبيين متساوية على التناظر وعلى مقتضى الحالة الثالثة تكون زواياهما متساوية غير أن تساوى الزوايا المتناظرة من المثلثين القطبيين يستلزم تساوى الاضلاع المتناظرة فى المثلثين الاصليين وإذن فقد رجع الامر الى الحالة السابقة

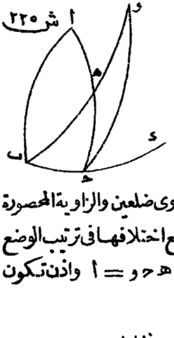
تنبيه ١ ـ اذا لم تكن الاجزاء المتساوية فى المثلثين موضوعة على ترتيب واحد فيهما فى أى

حالة من هذه الاحوال فيكون المثلثان المفروضان متماثلين وحينئذ فتجرى البرهنة على أحدهما وعلى المماثل للثانى

تنبيه ٢ ــ الاحوال الثلاثة الاول من هذه النظرية تشترك فيها المثلثات المستقيمة الاضلاع دون الحالة الرابعة لكنا لو أمعنا النظر وكنا لم نتحصل من تساوى الزوايا فى المثلثات الكروية غير تناسب الاضلاع كما فى المثلثات المستقيمة الاضلاع ثم لاحظنا أن نسبة الاقواس المتشابهة الى بعضها كنسبة أنصاف أقطار دوائرها لرأينا أن تناسب الاضلاع يقتضى تساويها لتساوى أنصاف أقطار دوائرها حيث أنا قيدنا تساوى المثلثات الكروية بأنها تكون مرسومة على كرة واحدة أو على كرات متساوية فلهذا كان تساوى الزوايا فى المثلثات الكروية قاضيا بتساوى أضلاعها

دعوى نظـــــرية

(٢٦٤) الزاوية الخارجة من أى مثلث كروى أكبر من كل واحدة على حدتها من الزاويتين الداخلتين من المثلث الا المجاورة لها (شكل ٢٢٥)



ش ٢٢٥

ليكن المطلوب البرهنة على أن زاوية ا حـ د أكبر من ا لذلك نصل بين نقطة ب ومنتصف ا حـ بقوس الدائرة العظيمة ب هـ ثم نمده ونأخذ منه القوس هـ و يساوى هـ ب ونصل قوس الدائرة العظيمة و حـ الذى يقسم الزاوية ا حـ د الى قسمين

فاذا قورن المثلثان هـ و حـ و ا هـ ب نجدهما متماثلين لتساوى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من أحدهما الضلعين والزاوية المحصورة بينهما من الثانى مع اختلافهما فى ترتيب الوضع وبناء على ما تقدم يتساوى فيهما باقى الاجزاء وتكون زاوية هـ حـ و = ا واذن تكون زاوية ا حـ د > ا وهو المطلوب

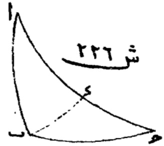
تنبيه ــ كان يمكن ايراد ما يقابل هذه النظرية فى الباب الاول من هذا الجزء

دعوى نظـــــرية

(٢٦٥) الضلع الاكبر من أى مثلث كروى تقابله الزاوية الكبرى وبالعكس (شكل ٢٢٦)

أولا ــ ليكن الضلع ا حـ > ا ب ويطلب البرهنة على أن زاوية ب > حـ

* لذلك يؤخذ من الضلع الاكبر ا ح الجزء ا د = ا ب ثم نصل قوس الدائرة العظمية ب د
* فتكون زاوية ا د ب = زاوية ا ب د وحيث كانت
* زاوية ا د ب خارجة عن المثلث ح د ب فتكون أكبر من
* زاوية ح ومن باب أولى تكون زاوية ا ب ح > ح
* ثانيا ـ لتكن زاوية ب > ح ويطلب البرهنة على أن
* ا ح > ا ب

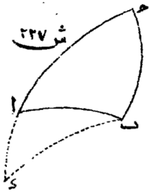


ش ٢٢٦

* وذلك لانه ان لم يكن ا ح أكبر من ا ب لكان مساويا له أو أصغر منه واذن تكون زاوية
* ب مساوية أو أصغر من زاوية ح وهما نتيجتان مغايران للفرض فيكون ا ح > ا ب
* وهو المطلوب

* دعوى نظـــــرية

* (٢٦٦) أى ضلع من أى مثلث كروى أصغر من مجموع الضلعين الآخرين (شكل ٢٢٧)
* يكفي أن نبرهن على أن الضلع الاكبر ب ح أصغر من مجموع
* الاثنين الآخرين
* لذلك يمد الضلع ا ح ويؤخذ عليه المقدار ا د = ا ب
* ثم يوصل قوس الدائرة العظمية ب د فالمثلث الحادث ا ب د
* يكون متساوى الساقين وتكون فيه زاوية د = زاوية
* ا ب د واذن فتكون أصغر من زاوية د ب ح وبناء على
* ماتقدم (بنمرة ٢٦٥) يكون الضلع ب ح أصغر من الضلع ح ا د من المثلث د ح ب
* أو أصغر من ح ا + ا د أو من ح ا + ا ب وهو المراد
* نتيجـــة ـ ومما ذكر ينتج أن أى ضلع من المثلث الكروى أكبر من الفرق بين الضلعين
* الآخرين

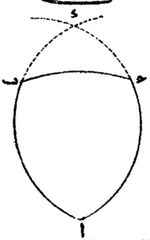


ش ٢٢٧

دعوى نظـــــرية

* (٢٦٧) مجموع أضلاع أى مثلث كروى أصغر من محيط دائرة عظمية (شكل ٢٢٨)
* اذا كان ا ب ح المثلث المعلوم فانا نمد الضلعين ا ح و ا ب الى أن يتلاقيا في
* نقطة د وبذلك يكون كل واحد من القوس ا ب د و ا ح د نصف محيط دائرة عظمية

ش ٢٢٨



* لكن اب + اح + ب ح < اب + اح
* + ب ء + ء ح (٢٦٦) أو اب + اح
* + ب ح < اب ء + اح ء أو < محيط
* دائرة عظيمة
* تنبيه ـ هذه النظرية والتي بعدها تقابلهما نظرية
* (نمرة ٢٤٣)

دعوى نظرية

* (٢٦٨) مجموع أضلاع أي مضلع كروي أقل من محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٢٩)

ش ٢٢٩

* لذلك يمد الضلعان اهـ , ح ء الحاصران بينهما
* الضلع ء هـ حتى يتلاقيا فيتوصل الى مضلع كروى
* ينقص رأسا عن الاول غير أن محيطه أطول من محيط
* المضلع الاول وباعادة هذه العملية مرارا فانا نتوصل
* أخيرا الى مثلث كروى محيطه أطول بكثير من محيط
* المضلع المعلوم
* نتيجة ـ نهاية طول محيط أي مضلع كروي محدب
* هو محيط الدائرة العظيمة المستعمل قاعدة لنصف الكرة المرسوم عليها هذا المضلع

دعوى نظرية

* (٢٦٩) مجموع زوايا أي مثلث كروى أكبر من قائمتين وأصغر من ست قوائم واذا أضيف
* لاصغرها قائمتان كان الناتج أكبر من مجموع الزاويتين الآخرتين
* اذا دلت الحروف ا , ب و ح على زوايا المثلث الثلاثة مرتبة على حسب ترتيب مقاديرها
* التصاعدية واعتبرنا المثلث القطبي له وكانت أضلاعه اَ , بَ و حَ مرتبة على حسب
* ترتيب مقاديرها التنازلية لانها مكملة للزوايا ا , ب و ح حدث
* أولا ـ حيث ان كل واحدة من الزوايا ا , ب و ح أقل من قائمتين يكون مجموعها
* أقل من ست قوائم وقد تقدم (٢٦٧) أن

أَ + بَ + حَ < ٤ ق أو ٢ ق − ا + ٢ ق − ب + ٢ ق − ح < ٤ ق

أو ا + ب + ح > ٢ ق

ثانيا - من المعلوم أن أَ < بَ + حَ (٢٦٦) فيكون

٢ ق − ا < ٢ ق − ب + ٢ ق − ح أو ا + ٢ ق > ب + ح وهو المراد

نتيجة - ينتج مما ذكر أن المثلث الكروى يمكن أن يكون فيه زاويتان قائمتان أو منفرجتان أو ثلاث زوايا قوائم أو منفرجة

فى حالة ما يكون الزاويتان ب و ح قائمتين فى المثلث الكروى تكون الرأس ا قطبا للقاعدة ب ح ويكون مقدار كل ضلع من ضلعى المثلث المحاطين بزاوية الرأس ا ربع محيط دائرة عظيمة

وأما فى حالة ما تكون الزوايا الثلاثة قائمة فان مقدار كل ضلع من أضلاعه يساوى ربع محيط دائرة عظيمة ويقال لهذا المثلث قائم الزوايا الثلاثة

اذا تصورنا تمرير محيط دائرة ما عظيمة وفرضنا أن ق و قَ قطباها ثم مررنا بالمستقيم المار بهما مستويين متعامدين فان هذه المستويات الثلاثة المتعامدة تقسم سطح الكرة الى ثمانية مثلثات كروية قائمة الزوايا الثلاثة وجميعها متساوية لتساوى أضلاعها ببعضها واذن فالمثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة يعادل ثمن الكرة التى هو جزء منها

تنبيه - يمكن بواسطة نظرية (نمرة ٢٦٨) استخراج نظرية أخرى تتعلق بمجموع زوايا المضلع الكروى بواسطة الآيل القطبى

دعوى نظـــــــرية

(٢٧٠) قوس الدائرة العظيمة الذى مقداره دون نصف محيط الواصل بين نقطتين على سطح الكرة هو أقصر طريق بين هاتين النقطتين على سطحها

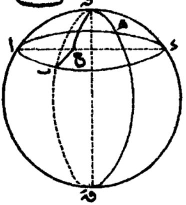
والبرهنة على هذه النظرية مؤسسة على الفائدتين الآتيتين

الفائدة الاولى

البعد الاصغر بين قطب أى دائرة وبين جميع نقط محيطها واحد (شكل ٢٣٠)

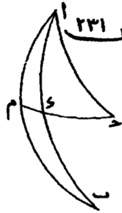
اذا كان ق قطب المحيط الدائرة ا ب د ووصل بينه وبين كل واحدة من النقطتين ا و ب بقوس دائرة عظيمة وفرض أن ق ح ب هو أصغر بعد بين القطب ق وبين نقطة ب

* وتصورنا دوران نصف الكرة الموجود على يمين الدائرة العظيمة ى ب ى َ حول القطر ى ى َ
* حتى تنطبق هذه الدائرة على الدائرة ى ا ى َ فان
* قوس الدائرة العظيمة ى ب ينطبق على مساويه ى ا
* و ينطبق نصف الكرة ى ب ى َ انطباقا تاما على
* نصف الكرة ى ا ى َ ب هـ ولما كان الخط ى ع ب
* لايزال عند الانطباق دالا على أقصر بعد بين ى و ب
* فيكون اذن هو أقصر بعد بين ى و ا

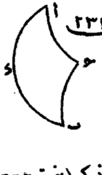


* الفائدة الثانية

* اذا كان كل واحد من قوسى الدائرتين العظيمتين ا ب و ا حـ دون نصف محيط (شكل ٢٣١)
* وفرض أن ا حـ > ا ب فأقول ان البعد الاصغر
* بين النقطتين ا و حـ أقل من البعد الاصغر بين
* النقطتين ا و ب
* وللبرهنة على ذلك نعتبر نقطة ا قطبا ونرسم منها محيط
* دائرة بنصف قطر مساو ا حـ فتكون هذه الدائرة
* قاطعة ضرورة للقوس ا ب فى نقطة بين ا و ب
* ثم اذا اعتبر القوس ا م ب انه أصغر طريق بين
* النقطتين ا و ب فانه يقطع المحيط حـ د فى نقطة م ويكون ا م أصغر طريق
* بين النقطتين ا و م لانه ان لم يكن كذلك ووجد أقصر منه فلا يكون ا م ب أقصر طريق
* بين ا و ب وهو مخالف للفرض وحيث ان أقصر طريق بين ا و م مساو لاقصر طريق
* بين ا و حـ كما تقدم فى الفائدة الاولى يكون أقصر طريق بين ا و حـ اذن هو أقل من
* أقصر طريق بين ا و ب



* اذا تقرر هذا يقال (شكل ٢٣٢) ليكن ا ب قوسا من محيط
* دائرة عظيمة دون نصف محيط واصلا بين النقطتين ا و ب
* فاذا فرض أن نقطة حـ الخارجة عن القوس ا د ب احدى
* نقط البعد الاصغر بين نقطتى ا و ب ووصل قوسا الدائرتين
* العظيمتين ا حـ و حـ ب وأخذ ا د يساوى ا حـ فعلى مقتضى ما ذكر (بنمرة ٢٦٦).



* يكون اب < اح + حب ثم اذا طرح من طرفى هذه المتباينة اد ، اح المتساويان
* يحدث دب < ب ح
* لكنه حيث ان أقصر طريق بين ا ، ح مساو لاقصر طريق بين ا ، د بناء على ما تقرر
* فى الفائدة الاولى وكانت ح احدى نقط أقصر طريق بين ا ، ب فيكون القوس ح ب
* أصغر من أقصر طريق بين د ، ب وهو ناتج مستحيل بناء على ما تقرر فى الفائدة الثانية حيث
* قد ثبت أن ب ح أكبر من ب د وحينئذ فلا يمكن وجود نقطة من نقط أقصر طريق
* بين ا ، ب خارجة عن القوس المذكور واذن فيكون هو عين القوس اب
* تنبيه ـ قد فرض فى البرهان السابق أن كل واحد من القوسين اح ، حب دون اب
* حيث لا يمكن أن يفرض خلاف ذلك لانه لو فرض أن اح > اب فان أقصر طريق بين
* ا ، ب يكون أقل من أقصر طريق بين ا ، ح واذن فلا يمكن أن تكون نقطة ح
* موجودة على الخط الاول

* الفصل الثالث

* (فى مسائل المثلثات والمضلعات الكروية)

* تعاريف

* (٢٧١) حيث انه يمكن تطبيق أى جزء من سطح الكرة على أى جزء آخر منها كان من
* الممكن أيضا مقارنة أى جزأين منها ولما كان المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة ثابت
* المقدار بالنسبة لسطح الكرة (٢٦٩) فنعتبره اذن وحدة للسطوح الكروية
* ومن المعلوم أنه لا يمكن مقارنة مساحة أى جزء من سطح الكرة بمساحة المتر المربع لان المستوى
* مهما كان صغره لا يمكن تطبيقه على سطح الكرة غير أنا نتكلم فى الجزء الرابع كيف يمكن اجراء
* تلك المقارنة

* (٢٧٢) الشقة هى جزء من سطح الكرة محصورة بين نصفى محيطى دائرتين عظيمتين وزاوية
* الشقة هى زاوية القوسين المحددين لها

دعوى نظـــــرية

* (٢٧٣) النسبة بين أى شقتين كالنسبة بين زاويتيهما
* وللبرهنة على ذلك يقال
* أولا — ان الشقتين المتساويتين زاوياتاهما كذلك وبالعكس
* وذلك لان تساوى الشقتين يقتضى انطباقهما على بعضهما وبذلك تنطبق زاوية احداهما على
* زاوية الاخرى وأما اذا كان الزاويتان متساويتين فان زوجيتى الشقتين تكونان متساويتين
* وبذلك تنطبق الشقتان على بعضهما
* ثانيا — اذا كان الشقتان متناسبتين وفرض أن النسبة بينهما كالنسبة بين العددين ٥ و ٣
* مثلا ثم قسمت الشقة الاولى الى خمسة شقات متساوية والثانية الى ثلاثة متساوية وكل واحدة
* منها مساوية لكل شقة من الشقات الخمس الاولى فان زاويتيهما الزوجيتين أو المستويتين
* تصير منقسمة الى زوايا متساوية الاولى الى خمسة والثانية الى ثلاثة وبناء عليه يتحصل
* هذا التناسب

$$\frac{\text{شقة ا}}{\text{شقة ب}} = \frac{\text{زاوية ا}}{\text{زاوية ب}}$$

* بفرض أن ا و ب يدلان على زاويتى الشقتين
* ثالثا — اذا كان الشقتان غير متناسبتين فانه يبرهن بمثل ما تقدم (بنمرة ٨٠ جزء أول)
* على أن النسبة بينهما هى كالنسبة بين زاويتيهما وهو المراد
* نتيجـــة ١ — اذا فرضنا أن الشقة ب هى الشقة القائمة المقابلة للزاوية القائمة وحدة
* الزوايا المستوية أمكن أن يعبر عن هذا التناسب بان الشقة تقاس بزاويتها
* نتيجـــة ٢ — وأما اذا اعتبرنا المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة وحدة للسطوح
* الكروية فمن حيث انه يساوى نصف الشقة القائمة أمكن وضع التناسب السابق على هذه
* الصورة بفرض أن م تدل على المثلث الكروى المذكور

$$\frac{\text{شقة ا}}{\text{٢ م}} = \frac{\text{زاوية ا}}{\text{زاوية قائمة}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{شقة ا}}{\text{م}} = \frac{\text{٢ زاوية ا}}{\text{قائمة}}$$

* أعنى أن الشقة تقاس فى هذه الحالة بضعف زاويتها

* هـذا ولابدمن أن تتذكردائما فى المقدار الاول أن الشقة منسوبة للشقة القائمة وأن زاويتها
* منسوبة للزاوية القائمة وأما فى المقدار الاخير فان الشقة منسوبة للمثلث الكروى القائم
* الزوايا الثلاث وزاويتها منسوبة للزاوية القائمة

دعوى نظـــــرية

* (٢٧٤) المثلثان الكرويان المتماثلان متكافئان (شكل ٢٢٠)
* ليكونا ا ب ح , اَ بَ حَ مثلثين كرويين متماثلين و ن قطب المثلث الاول فنصل
* بينه وبين مركز الكرة و بمستقيم ونمده حتى يقابل سطح الكرة فى نقطة نَ ومن حيث
* ان ن هى قطب للمثلث ا ب ح أى انها على أبعاد متساوية من النقط ا , ب , ح
* تكون نَ قطبا للمثلث اَ بَ حَ أى على أبعاد متساوية من النقط اَ , بَ , حَ
* وذلك لان نَ اَ = ن ا , نَ بَ = ن ب , نَ حَ = ن ح
* ويشاهد غير ذلك أن ن و نَ يوجدان اما داخل المثلثين ا ب ح , اَ بَ حَ أو خارجهما
* فى آن واحد
* اذا تقرر هذا يقال ان المثلث اَ بَ حَ منقسم الى ثلاثة مثلثات متساوية الساقين ومساوية
* الى المثلثات الثلاثة المنقسم اليها المثلث ا ب ح واذن فيكون المثلث اَ بَ حَ مكافئا
* للمثلث ا ب ح وهو المراد

* فائـــــدة

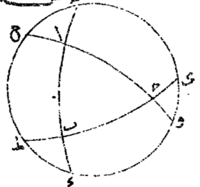
* (٢٧٥) اذا تقاطع قوسا دائرتين عظيمتين على نصف كرة فان مجموع المثلثين الكرويين الحادثين
* من ذلك يكافئ شقة الزاوية التى يتقاطع فيها قوسا الدائرتين العظيمتين (شكل ٢٢٢)
* ليكن ا ب اَ , ح ب حَ قوسى دائرتين عظيمتين متقاطعين فى نقطة ب على نصف الكرة
* ا ح اَ حَ فالمثلث ا ب ح يكافئ المثلث اَ بَ حَ المماثل له غير أن اَ بَ حَ + اَ ب حَ =
* شقة ب فيكون ا ب ح + اَ ب حَ = شقة ب وهو المراد

* دعوى نظـــــرية

* (٢٧٦) مساحة المثلث الكروى تساوى الفرق بين مجموع زواياه وقائمتين (بفرض أن
* المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة وحدة للسطوح الكروية والزاوية القائمة وحدة للزوايا
* المستوية) (شكل ٢٢٣)

* ليكن د ى ح محيط الدائرة العظيمة المعتبر قاعدة لنصف الكرة المشتمل على المثلث حيث
* يفرض دائما وجود المثلث على نصف كرة واحدة فاذا مدت أضلاع المثلث ب ح و ح ا
* و اب حتى تلاقى محيط القاعدة فيتحصل على مقتضى

ش ٢٣٣

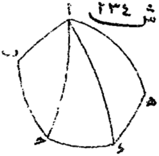


* الفائدة السابقة أن
* اب ح + ب ح و د + ح ا ه = شقة ا و
* اب ح + اب ط ح + ى ح و = شقة ح و
* اب ح + ا ح ى ه + د ب ط = شقة ب
* وبجمع هذه المتساويات على بعضها يحدث
* ٢ اب ح + نصف كرة = شقة ا + شقة ح + شقة ب أو
* $\text{اب ح} = \frac{\text{شقة ا + شقة ح + شقة ب − نصف كرة}}{٢}$
* غير أنا اذا نسبنا تلك السطوح الى المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة يحدث
* $\frac{\text{اب ح}}{\text{م}} = \frac{\text{شقة ا + شقة ح + شقة ب − نصف كرة}}{\text{الشقة القائمة}}$ لكن
* $\frac{\text{شقة ا}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ا}}{\text{قائمة}}$ ، $\frac{\text{شقة ح}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ح}}{\text{قائمة}}$ و
* $\frac{\text{شقة ب}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ب}}{\text{قائمة}}$ ، $\frac{\text{نصف كرة}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{٢ قائمة}}{\text{قائمة}}$
* فيحدث
* $\frac{\text{اب ح}}{\text{م}} = \frac{\text{ا+ب+ح−٢ق}}{\text{قائمة}}$ أو اب ح = ا + ب + ح − ٢ق وهو المطلوب
* مثال — اذا كانت ا = ٧٠° ١٠َ و ب = ٦٠° ٢٠َ و ح = ٨٠° فيكون ا + ب
* + ح − ٢ق = ٣٠° ٣٠َ واذن يكون
* $\frac{\text{اب ح}}{\text{م}} = \frac{\text{٣٠° ٣٠َ}}{\text{٩٠°}} = \frac{\text{١٨٣٠َ}}{\text{٥٤٠٠َ}} = \frac{١}{٣}$ تقريبا أو اب ح = $\frac{\text{م}}{٣}$
* وحيث ان م = $\frac{١}{٨}$ سطح الكرة فيكون اب ح مساويا الى $\frac{١}{٢٤}$ من سطح الكرة

دعوى نظـــــــرية

(٢٧٧) مساحة أى كثير أضلاع كروى تساوى الفرق بين مجموع زواياه وبين قوائم عددها بقدر عدد أضلاعه ناقصا اثنين مضروبا فى اثنين (شكل ٢٣٤)

ش ٢٣٤



ليكن ا ب ح ء هـ شكلا كثير الاضلاع كرويا معلوما فاذا مررنا بنقطة ا وبكل واحدة من النقطتين ء و ح قوس دائرة عظيمة فان الشكل ينقسم الى مثلثات كروية عددها مساو لعدد أضلاعه ناقصا اثنين وحيث ان مجموع زوايا المثلثات مساو لمجموع زوايا الشكل فتكون مساحة المضلع منسوبة الى المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث مساوية مجموع زواياه ناقصا من القوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه الاربعة وهو المراد

نتيجة ١ ـ اذا رمزنا بالحرف س لسطح المضلع الكروى وبالرموز ا و ب و ح ...الخ لزواياه وبالرمز ن لعدد أضلاعه تحصل

س = ا + ب + ح + ... الخ − ٢ (ن − ٢) = ا + ب + ح + ... الخ − ٢ن + ٤

نتيجة ٢ ـ اذا كان الشكل المعلوم مربعا كرويا وكان ا رمزا لاحد رؤسه حدث

س = ٤ ا − ٤ ومنه ا = ١ + $\frac{\text{س}}{٤}$

ومن هنا يشاهد أن زاوية المربع الكروى تزيد عن القائمة

الفصـــــــل الرابـــع

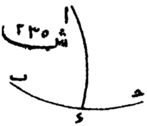
(فى الاقواس المتعامدة)

دعوى نظـــــــرية

(٢٧٨) أى نقطة مفروضة خارج دائرة عظيمة يمكن أن يمر بها قوس دائرة عظيمة واحد عمودى على الاول لا اثنان (شكل ٢٣٥)

ليكن ب ح قوس الدائرة العظيمة المعلوم و ا النقطة المفروضة خارجة عنه

* برهان الاول ـ يقام من مركز الكرة و عمود على مستوى الدائرة العظيمة ب ح ويمر به
* وبنقطة ا مستو يقطع الكرة في الدائرة العظيمة ا ء
* العمودية على الدائرة العظيمة ب ح وبذلك قد أمكن انزال
* قوس دائرة عظيمة عمودى على قوس الدائرة العظيمة ب ح
* المفروض من نقطة ا



شكل ٢٣٥

* برهان الثاني ـ يقال ان مستوى الدائرة العظيمة العمودى
* على الدائرة ب ح يجب أن يشتمل أولا على القطر العمودى
* على ب ح وثانيا على نقطة ا وحيث انه لا يتأتى الاتمرير مستو واحد بهذا المستقيم
* وبهذه النقطة فقد ثبت المطلوب

* تنبيه ـ ماذكرناه من البرهنة هو بفرض أن نقطة ا ليست قطبا للقوس ب ح

* دعوى نظـــــرية

* (٢٧٩) اذا مد من نقطة خارج قوس دائرة عظيمة قوس دائرة عظيمة عمودى عليه وعدة
* أقواس دوائر عظيمة مائلة فانه يحدث
* أولا ـ ان العمود أقصر من كل مائل
* ثانيا ـ المائلان اللذان افترقا عن موقع العمود ببعدين متساويين متساويان
* ثالثا ـ المائلان اللذان افترقا عن موقع العمود ببعدين مختلفين أبعدهما أطول
* يسهل البرهنة على هذه النظريات وعلى عكسها أيضا

* دعوى نظـــــرية

* (٢٨٠) كل نقطة من نقط قوس الدائرة العظيمة العمودى على وسط قوس دائرة عظيمة آخر
* على بعدين متساويين من نهايتي هذا القوس الاخير وكل نقطة خارجة عنه فهي على بعدين
* مختلفين منهما
* وهذه نظرية يسهل البرهنة عليها وعلى عكسها أيضا
* نتيجة ـ مستوى قوس الدائرة العظيمة المار عموديا على وسط قوس الدائرة العظيمة الثاني
* يكون عمودا على وسط وتر هذا القوس الاخير وذلك لان خط تقاطع مستويي القوسين

المذكورين ينصف هذا الوتر ويكون عمودا عليه وكذا يكون المستوى العمودى المذكور محل النقط الفراغية المتساوية البعد عن نهايتى هذا الوتر

دعوى نظرية

(٢٨١) يتساوى المثلثان الكرويان القائما الزاوية اذا وجد فيهما واحد من الشرطين الآتيين

أولا — اذا ساوى من أحدهما وتر وضلع لنظيريهما من الثانى

ثانيا — اذا ساوى من أحدهما وتر وزاوية مجاورة له لنظيريهما من الثانى والبرهنة عليهما سهلة

تنبيه — اذا لم تكن الاجزاء المتساوية فى المثلثين موضوعة على ترتيب واحد كانا متماثلين

الفصل الخامس

(فى الدوائر الصغيرة)

(٢٨٢) يتضح مما تقدم من النظريات أن قوس الدائرة العظيمة على الكرة هو بمثابة المستقيم على المستوى وأن قوس الدائرة الصغيرة عليها هو بمثابة قوس الدائرة عليه غير أن للدائرة الصغيرة مركزين ونصفى قطرين وأنه اذا وصل بين نقطتين من قوس دائرة صغيرة بقوس من دائرة عظيمة فانه يكون وترا لقوس الدائرة الصغيرة

ولنكتف هنا بذكر منطوق بعض نظريات مشابهة لما تقدم ذكرها فى الباب الثانى من الجزء الاول دون البرهنة عليها لسهولتها فنقول

الاولى — قوس أى دائرة عظيمة لا يقابل أى دائرة صغيرة فى أكثر من نقطتين

الثانية — القطر يقسم الدائرة الصغيرة الى قسمين متساويين

الثالثة — كل وتر أصغر من القطر

الرابعة — فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية أوتارها كذلك وبالعكس

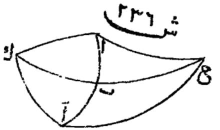
الخامسة — فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية القوس الاكبر يقابله الوتر الاكبر وبالعكس

السادسة — قطب أى قوس ونصف وتره ونصفه توجد فى مستوى دائرة عظيمة عمودى على الوتر

* السابعة ــ فى دائرة صغيرة واحدة أو فى دوائر صغيرة متساوية الاوتار المتساوية أبعادها عن
* المركز متساوية
* الثامنة ــ فى دائرة صغيرة واحدة أو فى دوائر صغيرة متساوية الوتران المختلفان أقربهما
* من المركز أطول و بالعكس
* التاسعة ــ قوس الدائرة العظيمة العمودى على نهاية نصف قطر دائرة صغيرة يكون مماسا
* لمحيطها

* دعوى نظـــــــرية

* (٢٨٣) اذا اشترك محيطا دائرتين صغيرتين فى نقطة خارجة عن الخط الواصل بين مركزيهما
* فانه لابد أن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مماثلة للاولى بالنسبة للخط الواصل بين المركزين
* (شكل ٢٣٦)



* ليكونا ع و ك مركزى الدائرتين و ع ب ك
* قوس الدائرة العظيمة الواصل بينهما و ا النقطة
* المشتركة بين المحيطين خارج ع ب ك فانه ينزل من
* هذه النقطة قوس الدائرة العظيمة ا ب عمودا على
* ع ب ك ثم يمد و يؤخذ عليه البعد ب ا َ = ب ا فتكون نقطة ا َ مماثلة لنقطة ا
* ثم يوصل ع ا و ع ا َ و ك ا و ك ا َ بأقواس دوائر عظيمة فيحدث ع ا = ع ا َ
* لان ع ب عمود على وسط ا ا َ وهكذا يكون ك ا = ك ا َ وحينئذ فمحيط الدائرة
* الذى يمر بنقطة ا لابد له أن يمر أيضا بنقطة ا َ

* نتيجة ١ ــ اذا لم يشترك محيطا دائرتين صغيرتين الا فى نقطة واحدة أى اذا تماسا فان نقطة
* تماسهما توجد على الخط الواصل بين المركزين

* نتيجة ٢ ــ الدائرتان الصغيرتان اللتان يشتركان فى نقطتين على الخط الواصل بين المركزين
* يتحدان معا

* نتيجة ٣ ــ لايمكن أن يشترك الدائرتان الصغيرتان فى نقطتين تكون احداهما على الخط
* الواصل بين المركزين و ثانيتهما خارجة عنه

* ## دعوى نظـــــرية

* (٢٨٤) اذا اشترك محيطا دائرتين صغيرتين فى نقطتين كان الخط الواصل بين مركزيهما عمودا
* على وسط الوتر المشترك (شكل ٢٣٦) وللبرهنة على ذلك يقال ان النقطتين المذكورتين
* لا يمكن أن تكونا على الخط الواصل بين المركزين (٢٨٣ نتيجة ٢) وكذا لا يمكن أن تكون
* احداهما عليه والاخرى خارجة عنه (٢٨٣ نتيجة ٣) وحيث ان كل واحد من مركزى
* الدائرتين متساوى البعد عن النقطتين المذكورتين فيوجدان اذن على قوس الدائرة العظيمة
* العمودى على وسط قوس الدائرة العظيمة الواصل بينهما

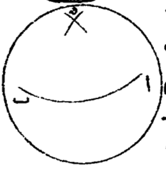
الفصـــــل السادس

(فى بعض مسائل عمليـــــة تطبيقية)

دعوى عمليـــــــة

(٢٨٥) المطلوب رسم قوس دائرة عظيمة يمر بنقطتين معلومتين (شكل ٢٣٧)

ش ٢٣٧

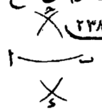


اذا كان النقطتان المعلومتان هما ا و ب فانه يكفى لحل هذه المسئلة ايجاد القطب ه لهاتين النقطتين ولذلك يركز فى كل واحدة منهما وبنصف قطر مساو لربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوسان يتقاطعان فى القطب ه ثم يركز فى القطب المذكور وبعين نصف القطر يرسم دائرة عظيمة فتمر بالنقطتين ا و ب المفروضتين

* تنبيه ـ الدائرتان العظيمتان اللتان مركزاهما ا و ب لابد من تقاطعهما لانه لما كان
* البعد المعلوم ا ب أقل من نصف دائرة عظيمة فهو أصغر من مجموع نصفى القطرين ولما
* كان زيادة على ذلك الفرق بين البعدين الاخيرين مساويا للصفر فيكون ا ب أكبر من
* فاضلهما واذن فيكون مجموع الابعاد الثلاثة أقل من محيط دائرة عظيمة

دعوى عملية

(٢٨٦) المطلوب تنصيف قوس دائرة عظيمة كانت أو صغيرة مرسوم على سطح الكرة (شكل ٢٣٨)



ش ٢٣٨

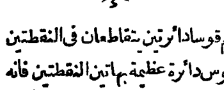
لحل هذه المسئلة يجب أن يمر قوس الدائرة العظيمة الجامع للنقط المتساوية البعد عن نهايتى القوس المعلوم

ولذلك يركز فى النقطتين ا و ب وبنصف قطر مناسب يرسم قوسا دائرتين يتقاطعان فى النقطتين ح و ى من نقط المحل المطلوب فاذا أريد الآن تمرير قوس دائرة عظيمة بهاتين النقطتين فانه يجرى العمل كما سبق بنمرة ٢٨٥

دعوى عملية

(٢٨٧) المطلوب تمرير من نقطة معلومة على سطح الكرة دائرة عظيمة عمودية على مستوى دائرة عظيمة معلومة (شكل ٢٣٩)

أولا — اذا كانت الدائرة العظيمة المعلومة مرسومة بتمامها على سطح الكرة فانه يركز فى نقطة ا وبنصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوس دائرة يقطع الدائرة المعلومة فى نقطة مثل ن تكون قطبا للدائرة العظيمة المطلوب تمريرها من نقطة ا



ش ٢٣٩

لانه اذا تعامد دائرتان عظيمتان فقطب احداهما يوجد ضرورة على محيط الاخرى

ثانيا — اذا لم تكن الدائرة العظيمة المعلومة مرسومة بتمامها فانه يركز فى نقطة ا وبنصف قطر مناسب يرسم قوس يقطع القوس المعلوم فى النقطتين هـ و ب المتساويى البعد عن نقطة ا ثم يمرر بعد ذلك قوس الدائرة العظيمة المنصف للقوس هـ ى كما تقدم بنمرة ٢٨٦

دعوى عملية

(٢٨٨) المطلوب تمرير محيط دائرة على سطح الكرة يمر بثلاث نقط معلومة عليه ا و ب و ح

طريقة ذلك أن ترسم الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ا و ب (٢٨٦) ثم ترسم أيضا الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ب و ح (٢٨٦) فيتقاطع هاتان الدائرتان فى قطب الدائرة ا ب ح المطلوبة

تنبيه ـ الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ا و ب تمر أيضا بقطب الدائرة الصغيرة ا ب ح ومن ذلك يمكن ايراد هذه النظرية

اذا أقيم على أواسط أضلاع مثلث كروى دوائر عظيمة عمودية عليها فانها تتقاطع فى نقطة واحدة تكون مركزا للدائرة المرسومة على المثلث المذكور

دعوى عمليـــــــــة

(٢٨٩) اذا علمت نقطة خارج قوس دائرة عظيمة والمطلوب تمرير قوس دائرة عظيمة منها يصنع مع الاول زاوية معلومة (شكل ٢٤٠)

وللوصول الى ذلك نفرض أن المسئلة محلولة وأن ا ح هو القوس المطلوب

فاذا ركز فى نقطة ا ورسم قوس الدائرة العظيمة ح ب بنصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة وأخذ عليه بعد مساو لقوس الزاوية المطلوبة فتتعين بذلك نقطة ح

فاذا وصل بينها وبين نقطة ا بقوس دائرة عظيمة تكون الزاوية ح ا ب هى الزاوية المطلوبة

الفصـــــــل السابع

(تمـــرينات)

١ ـ المعلوم قوس من دائرة عظيمة مرسوم على سطح الكرة والمطلوب تكميل محيط الدائرة العظيمة الذى هو جزء منه

٢ ـ المطلوب البرهنة على أن نقطتى تماس المستويين المتوازيين المماسين لسطح الكرة هما نهايتا أحد أقطارها

* ٣ ـ المطلوب رسم المثلث الكروى اذا علم منه
* أولا ـ أضلاعه الثلاثة
* ثانيا ـ زواياه الثلاثة
* ثالثا ـ ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
* رابعا ـ ضلع والزاويتان المجاورتان له

الباب الثالث
(فى كثيرى السطوح)

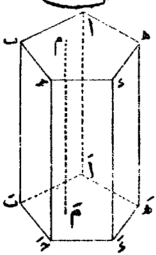
الفصل الاول
(تعاريف)

(٢٩٠) كثير السطوح هو جسم محاط من جميع جهاته بمضلعات مستوية تسمى أوجهه وأضلاع تلك الاشكال المستوية تسمى أحرفه ورؤسها هى رؤسه وكل حرف من هذه الاحرف يشترك بين وجهين بخلاف الرؤس فانها لا تشترك بين أقل من ثلاثة أوجه

وحينئذ فأجزاء كثير السطوح هى الزوايا المجسمة والزوايا الزوجية والاوجه والاحرف

وتمتاز كثيرات السطوح عن بعضها بعدد أوجهها فما كان له أربعة أوجه وهو أقلها عددا يسمى هرما ثلاثيا أو ذا الاربعة أوجه وهكذا

(٢٩١) المنشور هو كثير السطوح المركب من جملة مستويات متقاطعة مثنى فى مستقيمات متوازية ومنتهية بمستويين متوازيين (شكل ٢٤١)


ش ٢٤١

ومن هذا التعريف ينتج

أولا — ان المستقيمات ا اَ و ب بَ و ... الخ المتوازية المحصورة بين مستويين متوازيين متساوية

ثانيا — ان الاحرف اب و بح و حد و ... الخ هى مساوية وموازية على التناظر للاحرف اَبَ و بَحَ و حَدَ و ... الخ

وبناء عليه يكون الشكلان ا ب ح د ه و اَ بَ حَ دَ هَ متساويين لتساوى الاضلاع والزوايا المتناظرة فيهما ويسميان قاعدتى المنشور

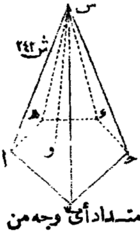
المستقيم م مَ الذى يقدر به البعد الكائن بين القاعدتين يسمى ارتفاع المنشور

المنشور يكون قائما أو مائلا على حسب ماتكون أحرفه الجانبية عمودية أو مائلة على مستوى القاعدتين غير أن المنشور القائم تكون فيه الاشكال المتوازية الاضلاع الجانبية مستطيلات ويكون أحد أحرفه ارتفاعا له

(٢٩٢) متوازى السطوح هو منشور قاعدتاه شكلان متوازيا الاضلاع فاذا كان قائما وقاعدتاه مستطيلتين فانه يسمى بمتوازى المستطيلات

(٢٩٣) المكعب هو متوازى مستطيلات قاعدته شكل مربع وارتفاعه مساو أحد أحرف قاعدته ومن هذا التعريف ينتج أن أوجه المكعب هى مربعات متساوية

(٢٩٤) الهرم هو جسم محدد بمضلع مستو ا ب ح ى ه وبجملة مثلثات قواعدها الاضلاع المختلفة لهذا المضلع ورؤسها مجتمعة فى نقطة واحدة س خارج المضلع المذكور (شكل ٢٤٢) وتسمى نقطة س برأس الهرم وأما المضلع ا ب ح ى ه فيسمى قاعدته والعمود س و النازل من رأسه الى قاعدته يسمى ارتفاع الهرم وتمتاز الاهرامات عن بعضها بعدد أوجهها المحيطة بالرأس أو بعدد أضلاع شكل قاعدته فما كانت قاعدته مثلثا يسمى هرما ثلاثيا وما كانت قاعدته شكلا رباعيا يسمى هرما رباعيا وهكذا



الهرم المنتظم ما كانت قاعدته شكلا منتظما وكان مركزها موقع العمود النازل من رأسه عليها

(٢٩٥) كثير السطوح المحدب هو الذى يوجد بتمامه فى احدى جهتى امتداد أى وجه من أوجهه ولم نتكلم هنا الا على كثيرات السطوح المحدبة

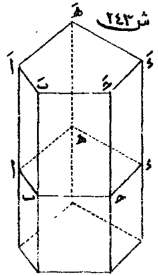
وينتج من تعريف الشكل المحدب أن المستقيم لا يمكن أن يقطعه فى أكثر من نقطتين

الفصل الثانى

(فى المبادى)

دعوى نظرية

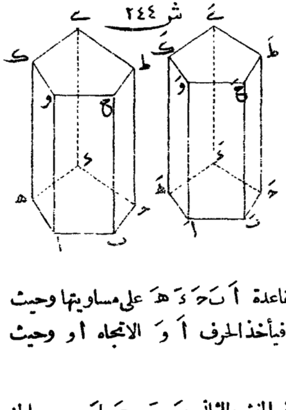
(٢٩٦) اذا قطع المنشور بمستويات متوازية فان القطاعات الحادثة تكون مضلعات مستوية متساوية (شكل ٢٤٣)



اذا كان المستويان القاطعان هما ا ب ح ى هـ , اَ بَ حَ ىَ هَ فالمستقيمان ا ب و اَ بَ يكونان متوازيين لانهما خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستو ثالث وحيث انهما محصوران بين مستويين متوازيين فيكونان متساويين أيضا وبناء عليه فكثيرا الاضلاع ا ب ح ى هـ و اَ بَ حَ ىَ هَ متساويان لتساوى أضلاعهما وزواياهما المتناظرة الموضوعة على ترتيب واحد

دعوى نظرية

(٢٩٧) يتساوى المنشوران اذا ساوى من أحدهما الاوجه الثلاثة المركبة لاحدى زواياه المجسمة لنظائرها من الثانى وكانت موضوعة على ترتيب واحد (شكل ٢٤٤)



اذا كانت الاوجه الثلاثة المركبة للجسمتين الثلاثيتين ا و اَ متساوية وكانت موضوعة على ترتيب واحد بأن كان

ا ب ح ى هـ = اَ بَ حَ ىَ هَ و ا ب ع و = اَ بَ عَ وَ و ا هـ ك و = اَ هَ كَ وَ

فانا نبرهن على امكان انطباق أحد الجسمين على الآخر انطباقا تاما

ولذلك نضع المنشور الثانى على الاول بان نطبق القاعدة اَ بَ حَ ىَ هَ على مساويتها وحيث ان الجسمتين ا و اَ متساويتان (٢٤٠ ثالثا) فيأخذ الحرف اَ وَ الاتجاه ا و وحيث انهما متساويان فتقع نقطة وَ على نقطة و

وبعد انطباق اَ وَ على ا و تنطبق باقى أحرف المنشور الثانى بَ عَ و حَ طَ و ... الخ على نظائرها من الاول وبذلك ينطبق المنشوران على بعضهما ويتساويان

نتيجة — اذا كان المنشوران قائمين فانه يكفى فى تساويهما حصول التساوى بين قاعدتيهما وارتفاعيهما لان ذلك كاف لانطباق أحد المنشورين على الثانى

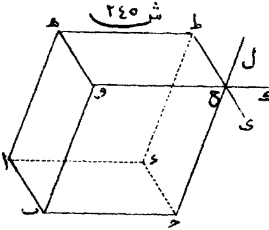
دعوى نظـــــــرية

(٢٩٨) كل متوازى سطوح يكون فيه

أولا ـ الاوجه المتقابلة متساوية ومتوازية

ثانيا ـ الزوايا الزوجية المتقابلة متساوية

ثالثا ـ الزوايا المجسمة الثلاثية المتقابلة متماثلة (شكل ٢٤٥)



برهان الاول يقال ـ أما القاعدتان ا ب حـ ء و هـ و ع ط فهما على مقتضى تعريف متوازى السطوح متساويتان ومتوازيتان وأما الوجهان ا ب و هـ و ء حـ ع ط ففيهما الضلعان ا ب و ء حـ متساويان ومتوازيان لانهما ضلعان متقابلان من الشكل المتوازى الاضلاع ا ب حـ ء والضلعان ب و و حـ ع كذلك لانهما من متوازى الاضلاع ب و ع حـ والضلعان هـ و و ع ط كذلك أيضا لانهما من متوازى الاضلاع هـ و ع ط وبناء عليه فيكونان متوازيين ومتساويين وبمثل ذلك يبرهن على توازى وتساوى الوجهين ب حـ ع و و ا ء ط هـ

برهان الثانى يقال ـ أما الزوجيتان ا ب و ع ط فهما متساويتان لانا لو مررنا مستويا عموديا على حرفيهما فانه يقطع وجهى كل واحدة منهما فى مستقيمين يتكون بينهما زاويتها المستوية ولتوازى أضلاع الزاويتين المستويتين المذكورتين ومضادتهم فى الجهة تكونان متساويتين وبمثل ذلك يبرهن على تساوى باقى الزوجيات

برهان الثالث يقال ـ ان المجسمتين الثلاثيتين ا و ع نجد أنهما مركبتان من أجزاء متساوية غير أنها موضوعة على ترتيب منعكس لانا لو مددنا أحرف المجسمة ع على استقامتها فانه يتشكل منها زاوية مجسمة مساوية للمجسمة ا لتركبهما من أجزاء متساوية موضوعة على ترتيب واحد

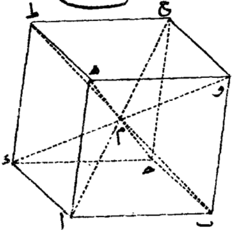
نتيجة ـ يمكن اعتبار أى وجهين متقابلين من متوازى السطوح كأنهما قاعدتان له

تنبيه ـ فى الحالة الخصوصية التى يكون فيها متوازى السطوح قائما يكون فى كل واحدة من المجسمتين ا و ع زاويتان مستويتان قائمتان وبذلك يمكن انطباقهما على بعضهما

دعوى نظـــــــرية

(٢٩٩) أقطار متوازى السطوح الاربعة تنصف بعضها (شكل ٢٤٦)

ش ٢٤٦

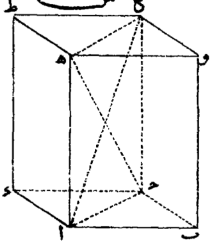


ليكن ا ب ح د ھ و ع ط متوازى السطوح المعلوم فاذا اعتبرنا القطرين ا ع , ح ھ ووصلنا ع ھ , ا ح نرى أن الشكل ا ح ع ھ متوازى أضلاع لان الضلعين ا ھ , ح ع متوازيان ومتساويان وحينئذ فقطراه ينصفان بعضهما وبمثل ذلك يبرهن على باقى الاقطار

تنبيه ١ ــ نقطة تقابل الاقطار تسمى أحيانا مركز متوازى السطوح

تنبيه ٢ ــ أقطار متوازى المستطيلات متساوية ومربع أحدها يساوى مجموع مربعات الاحرف الثلاثة المجتمعة معه فى احدى الرأسين الواصل هو بينهما (شكل ٢٤٧)

ش ٢٤٧



برهان الاول ــ اذا اعتبرنا القطرين ا ع , ح ھ نجد أنهما متساويان لان الشكل ا ح ع ھ مستطيل

برهان الثانى ــ يؤخذ من المثلث القائم الزاوية ا ح ع أن

$$\overline{\text{اع}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} + \overline{\text{حع}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} + \overline{\text{اھ}}^{2}$$

لكن $\overline{\text{اح}}^{2}$ من المثلث القائم الزاوية ا ب ح مساو $\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2}$ أو مساو الى $\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اد}}^{2}$ واذن يكون

$$\overline{\text{اع}}^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اد}}^{2} + \overline{\text{اھ}}^{2}$$ وهو المراد

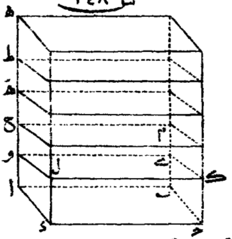
الفصـــــل الثـــالث

(فى قياس حجم متــوازى الســطوح)

(٣٠٠) اذا اعتبرنا حجم المكعب المنشأ على وحدة الاطوال وحدة للاحجام فيكون حجم أى كثير مسطوح هو النسبة الكائنة بين حجمه وحجم ذلك المكعب المعتبر وحدة

دعوى نظـــــرية

(٣٠١) النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدين فى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما (شكل ٢٤٨)



انفرض أولا وجود مقياس مشترك بين الارتفاعين اهـ و اهَ بحيث يكون مثلا $\frac{اهـ}{اهَ} = \frac{٥}{٣}$

فاذا تصوّرنا مرور مستويات موازية للقاعدة من نقط تقاسيم الارتفاعين فان متوازى المستطيلات الاوّل ينقسم الى خمسة متوازيات المستطيلات متساوية لاتحادها فى القاعدة والارتفاع وأما الثانى فانه ينقسم الى ثلاثة فقط متساوية أيضا

وحينئذ اذا رمزنا بالرمزين ح و حَ لحجمى الجسمين تحصل $\frac{ح}{حَ} = \frac{٥}{٣}$

ومن هذا التناسب والسابق يحدث

$$\frac{ح}{حَ} = \frac{اهـ}{اهَ} = \frac{ع}{عَ}$$

بفرض أن ع و عَ يدلان على الارتفاعين

وأما اذا لم يوجد بين الارتفاعين مقياس مشترك فانه يبرهن كما سبق (بنمرة ٨٠ جزء أوّل) على أن النسبة بين حجمى الجسمين المذكورين على أى حالة كانت هى كالنسبة بين ارتفاعيهما

تنبيه — يطلق على الاحرف الثلاثة الخارجة من رأس واحدة من رؤس متوازى المستطيلات اسم أبعاد الجسم ومتى علمت هذه الابعاد فان متوازى المستطيلات يتعين تعيينا تاما

وحيث قد علم مما تقدم أنه يمكن اعتبار قاعدة الجسم المذكور أى وجه من أوجهه أمكن التعبير عن منطوق النظرية السابقة بهذه العبارة الآتية

النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدين فى بعدين من أبعادهما الثلاثة كالنسبة بين بعديهما الثالثين

دعوى نظرية

(٣٠٢) النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدين فى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما

اذا كان متوازيا المستطيلات المعلومان هما ح و حَ وأبعاد الاول هى ا و ب و حـ وأبعاد الثانى هى اَ و بَ و حـ واعتبرنا الوجهين ا ب و اَ بَ قاعدتين لهما فيكون حـ ارتفاعهما المشترك

ثم اذا اعتبرنا متوازى مستطيلات ثالث حً وأبعاده ا و بَ و حـ وقارناه بمتوازيى المستطيلات السابقين تحصل على مقتضى النظرية السابقة أن

$$\frac{\text{ح}}{\text{حً}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{حً}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ا}}{\text{اَ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ا}}{\text{اَ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{بَ}}$$

وقد علم فى الباب الاول من الجزء الثانى أن الحاصل $\frac{\text{ا}}{\text{اَ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{بَ}}$ يدل على النسبة الكائنة بين مستطيلين بعدا أحدهما ا و ب وبعدا الثانى اَ و بَ فاذا رمز لهذين السطحين بالرمزين ن و نَ أمكن أن يكتب $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ن}}{\text{نَ}}$ وهو المراد

نتيجة ـ اذا فرضنا تقدير الابعاد ا و ب و حـ و اَ و بَ و حـ باعداد كان $\frac{\text{ا}}{\text{اَ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{اَ بَ}}$ وحينئذ فيمكن التعبير عن منطوق النظرية المتقدمة بالطريقة الآتية

النسبة بين متوازيى المستطيلات المتحدين فى بعد واحد كالنسبة بين حاصل ضرب بعديهما الآخرين

دعوى نظرية

(٣٠٣) النسبة بين أى متوازيى المستطيلات كالنسبة بين حاصل ضرب قاعدة الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه

فاذا كان ح و حَ متوازيى المستطيلات المعلومين وأبعاد الاول هى ا و ب و حـ وأبعاد الثانى هى اَ و بَ و حـَ وفرض متوازى مستطيلات ثالث حً وأبعاده ا و ب و حـَ وقارناه بكل واحد من المعلومين فانه يتحصل على مقتضى النظريتين السابقتين هذان التناسبان

$$\frac{\text{ح}}{\text{حً}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حـَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{حً}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ا}}{\text{اَ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ا}}{\text{اَ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \times \frac{\text{حـ}}{\text{حـَ}}$$

ثم اذا فرض تقويم الابعاد باعداد أمكن أن يكتب $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ا ب حـ}}{\text{اَ بَ حـَ}} = \frac{\text{ن ع}}{\text{نَ عَ}}$

نتيجة ــ اذا فرض أن ع هو المكعب المختار وحدة للاجسام فتكون أبعاده أَ و بَ و حَ وحدة الاطوال المرموزله بحرف ل وحينئذ يكون $\frac{ع}{عَ} = \frac{أ}{ل} \times \frac{ب}{ل} \times \frac{ح}{ل}$

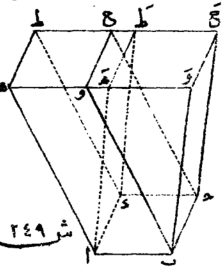
وحيث ان المقادير $\frac{ع}{عَ}$ و $\frac{أ}{ل}$ و $\frac{ب}{ل}$ و $\frac{ح}{ل}$ تدل على مقاس الكميات ع و ا و ب و ح أمكن أن يقال لقياس حجم متوازى المستطيلات يضرب مقاسات أبعاده الثلاثة فى بعضها

ومن جهة أخرى حيث ان الحاصل $\frac{أ}{ل} \times \frac{ب}{ل}$ يدل على مقاس القاعدة (ا و ب) أمكن أن يقال أيضا لقياس حجم متوازى المستطيلات بضرب مقاس قاعدته فى مقاس ارتفاعه

تنبيــــه ــ يجب أن يتذكر دائما أن منطوق هذه النظرية يقضى أن يكون وحدة السطوح هو المربع المنشأ على وحدة الاطوال ووحدة الاجسام هو المكعب المنشأ على وحدة الاطوال

دعوى نظــــــــــرية

(٣٠٤) متوازيا السطوح المتحدان فى قاعدة واحدة وقاعدتاهما الاخريان فى مستو واحد ومحصورتان بين مستقيمين متوازيين يكونان متكافئين (شكل ٢٤٩)



ش ٢٤٩

ليكن ا ب ح ء هـ و ع ط و ا ب ح ء هـَ وَ عَ طَ متوازيى السطوح المعلومين المتحدين فى القاعدة السفلى ا ب ح ء وقاعدتاهما العليان هـ و ع ط و هـَ وَ عَ طَ فى مستو واحد ومحصورتان بين المستقيمين المتوازيين هـ وَ و ط عَ نعتبر فى الشكل الكلى المنشورين الثلاثيين هـ ا هـَ ط ء طَ و و ب وَ ع ح عَ فيشاهد فيهما أن الجسمتين الثلاثيتين هـ و محاطتان بثلاثة أوجه متساوية النظير لنظيره وموضوعة على ترتيب واحد

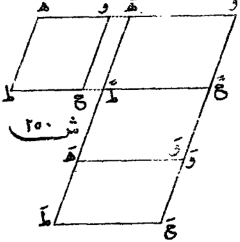
وبيانها المثلث هـ ا هـَ = المثلث و ب وَ لتساوى وتوازى أضلاعهما المتناظرة

والوجه هـ ا ء ط = الوجه و ب ح ع لكونهما وجهين متقابلين من متوازى سطوح واحد والوجه هـ هـَ طَ ط = الوجه و وَ عَ ع لاشتراكهما فى الجزء وهـَ طَ ع ولتساوى الجزأين الباقيين منهما القاعدة المشتركة ا ب ح ء وحينئذ فالمنشوران الثلاثيان المذكوران متكافئان لكنه اذا طرحنا من الشكل الكلى المنشور الثلاثى الاول كان الباقى هو متوازى السطوح الثانى

واذا طرحنا المنشور الثانى كان الباقى هو متوازى السطوح الاول وبناء عليه فتوازيا السطوح متكافئان

دعوى نظرية

(٣٠٥) متوازيا السطوح المتحدان فى القاعدة والارتفاع متكافئان (شكل ٢٥٠)



حيث قد فرض اتحاد متوازيى السطوح ح و حَ فى القاعدة السفلى ا ب ح د وفى الارتفاع فتكون قاعدتاهما العليان ضرورة فى مستو واحد مواز للقاعدة ا ب ح د فان كانتا مع ذلك محصورتين بين مستقيمين متوازيين ثبت المطلوب (٣٠٤) والا فنمد هـ و ، ح ط ، هـَ طَ ، وَ حَ فيتشكل من ذلك شكل متوازى الاضلاع هـً وً حً طً مساو ومواز للقاعدة ا ب ح د

وذلك لانه حيث كان هـً وً مساويا وموازيا هـَ وَ فيكون مساويا وموازيا ا ب وكذلك حيث كان هـً طً مساويا وموازيا هـ ط فيكون مساويا وموازيا ا د

وحينئذ فيمكن اعتبار هـً وً حً طً كأنه قاعدة علوية لمتوازى سطوح ثالث حً مشترك مع الاولين فى القاعدة السفلى ا ب ح د

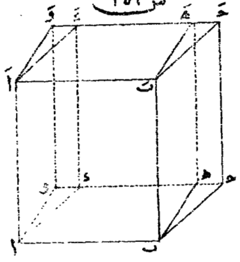
واذا قارنا متوازى السطوح الاخير حً بكل واحد من متوازيى السطوح ح و حَ نشاهد على مقتضى النظرية السابقة أنه يكافئ كل واحد منهما واذن فهما متكافئان

نتيجة ـ كل متوازى سطوح مائل يمكن تحويله الى آخر قائم يكافئه متحد معه فى القاعدة والارتفاع وذلك لانه اذا أقيمت من رؤس القاعدة السفلى أعمدة عليها ومدت حتى تلاقى مستوى القاعدة العليا فانه يتشكل من ذلك متوازى سطوح قائم متحد مع الاول فى القاعدة والارتفاع وبناء على النظرية السابقة يكون مكافئا للاول

دعوى نظرية

(٣٠٦) كل متوازى سطوح قائم يمكن تحويله الى متوازى مستطيلات يكافئه متحد معه فى الارتفاع وقاعدتاهما متكافئتان (شكل ٢٥١) ليكن ا ب ح د ، اَ بَ حَ دَ متوازى

السطوح القائم فعلى مقتضى الفرض تكون قاعدتاه شكلين متوازيى الاضلاع وأماأوجهه فهى مستطيلات



فاذا اعتبرنا الوجهين المتقابلين ا ب أ َ بَ و حـ ء حـَ ءَ من متوازى السطوح قاعدتين له وأقيم من النقط ا و ب و اَ و بَ أعمدة على القاعدة ا ب أ َ بَ فتنحصر هذه الاعمدة بين مستويى القاعدتين وتكون أعمدة على الحرفين ا ب و أ َ بَ ثم اذا وصل هـ هـَ و و وَ فانه يتكون متوازى مستطيلات يكافئ متوازى السطوح القائم (٣٠٤)

ونشاهد غير ذلك أن القاعدة ا ب حـ ء قد استعوضت بالمستطيل ا ب هـ و المكافئ لها وأما الارتفاع ا اَ فهو باق على حاله وبذلك ثبت المطلوب

نتيجة ـ ينتج مما ذكر أن مساحة متوازى السطوح تساوى لحاصل ضرب مقاس قاعدته فى مقاس ارتفاعه لانه يكافئ متوازى المستطيلات المتحد معه فى القاعدة والارتفاع

تنبيه ـ من المعلوم أن المساحة الصطحية الجانبية لمتوازى سطوح معلوم عبارة عن مجموع مسائح الاوجه الجانبية له وحيث ان كل وجهين متقابلين فيه متساويان فيؤخذ اذن ضعف مساحة وجهين متجاورين منه ويضمان الى بعضهما

فاذا دل ا و ب على ضلعين متجاورين من قاعدته و ع و عَ على ارتفاعى المستطيلين المتجاورين المشتملين عليهما و س على المساحة الجانبية تحصل

$$س = ٢ (ا ع + ب عَ)$$

واذا أريد ضم مساحتى القاعدتين العليا والسفلى الى هذه المساحة وفرض أن ء يدل على ارتفاع القاعدة حدث

المساحة السطحية الكلية $= ٢ (ا ع + ب عَ) + ٢ ا ء = ٢ (ا ع + ب عَ + ا ء)$

أما فى حالة ما يكون الجسم متوازى سطوح قائما فان ع و عَ يكونان مساويين للحرف الثالث حـ ويؤل القانونان المتقدمان الى

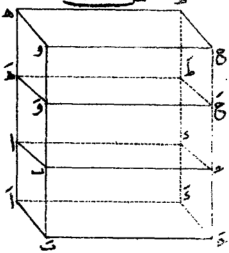
$س = ٢ (ا + ب) \times حـ$ والمساحة السطحية الكلية $= ٢ (ا حـ + ب حـ + ا ء)$

وفى حالة ما يكون الجسم متوازى مستطيلات فان ى يكون مساويا ب وتكون المساحة السطحية الكلية مساوية الى ٢ (ا ح + ب ح + ا ب)

الفصل الرابع
(فى قياس المنشور)

دعوى نظرية

(٣٠٧) أىّ منشور يكافئ منشورا قائما تكون قاعدته القطع العمودى على أحرفه وارتفاعه يكون مساويا طول حرفه (شكل ٢٥٢)



ليكن ا ب ح ى هـ و ع ط المنشور المعلوم فاذا مد من نقطة هـَ احدى نقط الحرف ا هـ مستو عمودى عليه فيكون عمودا ضرورة على جميع الاحرف ويحدد على المنشور القطع العمودى هـَ وَ عَ طَ ثم اذا أخذ بعد ذلك هـَ اَ = هـ ا ومد من نقطة اَ قطع آخر عمودى اَ بَ حَ ىَ فان الجسم المحصور بين هذين القطعين العموديين يكون منشورا (٢٩١)

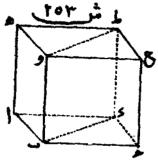
وللبرهنة على تكافؤ المنشورين ا ب ح ى هـ و ع ط , اَ بَ حَ ىَ هـَ وَ عَ طَ يقارن الجزء المنشورى اَ بَ حَ ىَ ا ب ح ى بالجزء المنشورى هـَ وَ عَ طَ هـ و ع ط فمن حيث ان القاعدتين اَ بَ حَ ىَ , هـَ وَ عَ طَ متساويتان فانه يمكن وضع احداهما على الاخرى وانطباقهما على بعضهما وحيث كان ا اَ عمودا على القطع العمودى فيأخذ بعد الانطباق الاتجاه هـ هـَ وحيث ان اَ هـَ = ا هـ يكون ا اَ = هـ هـَ وبذلك تقع نقطة ا على نقطة هـ وبمثل ذلك يبرهن على انطباق باقى النقط ب , ح , ى على النقط هـ , ع , ط وحينئذ يكون جزآ المنشورين متساويين

فاذا طرح على التوالى كل واحد من جزأى المنشورين المذكورين من الجسم الكلى فان الباقيين الناتجين وهما المنشور المائل والمنشور القائم يكونان متكافئين وهو المطلوب

دعوى نظـــــرية

(٣٠٨) المستوى المار بحرفين متقابلين من متوازى السـطوح يقسمه الى منشورين ثلاثيين متكافئين

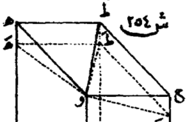
شـ ٢٥٣



أولا ـ اذا كان متوازى السطوح قائما مثل ا ب ح ء هـ و ح ط (شكل ٢٥٣) فانه يسـهل البرهنـة على تكافؤ المنشورين الثلاثيين ا ب ء هـ و ط ، ء ب ح ط و ح القائمين المنقسم اليهما بالمستوى ط و ء ب وذلك لاتحادهما فى الارتفاع ح ح ولتساوى قاعدتيهما الامكان انطباقهما على بعضهما بعد الدوران

ثانيا ـ اذا كان متوازى السطوح المعلوم مائلا مثل ا ب ح ء هـ و ح ط (شكل ٢٥٤) فانها تتعـذر البرهنـة على تكافؤ المنشورين الثـلاثيين ا ب ء هـ و ط ، ء ب ح ط و ح المنقسم اليهما متوازى السطوح بواسطة التطبيق كما فى الحالة الاولى غير أنا نبرهن على التكافؤ بالطريقة الآتية

شـ ٢٥٤



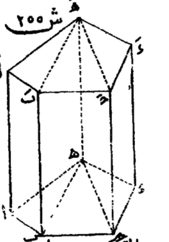
نمرر بالنقطتين ب ، و مستويين عمودين على الحرف ب و فيكونان عمودين على جميع أحرف متوازى السـطوح ويقطعانها فى النقط اَ ، ءَ ، حَ ، هـَ ، طَ ، عَ وحيث ان الاوجه المتقابلة من متوازى السـطوح متوازية يكون اَ ءَ موازيا ب حَ . اَ ب موازيا حَ ءَ ، وهـَ موازيا عَ طَ ، وعَ موازيا هـَ طَ واذن فيكون القطعان شكلين متوازيى الاضلاع ومثلهما باقى الاوجه وحيث انهما عمودان على الحرف ب و فيكونان متوازيين وعلى مقتضى ما تقرر (بنمرة ٢٩٦) يكونان متساويين وبناء عليه يكون الجسم الحادث منشورا وهو قائم لكون الحرف ب و عمودا على مستوى القاعدة

اذا تقرر هذا ولاحظنا ما ذكر (بنمرة ٣٠٧) من أن أى منشور يكافئ منشورا قائما قاعدته القطع العمودى على أحرفه وارتفاعه طول حرفه نجد من جهة أن المنشور ا ب ح ء هـ و ح ط يكافئ المنشور القائم اَ بَ حَ ءَ هـَ وَ طَ ومن جهـة أخرى أن كل واحد من المنشورين الثـلاثيين ا ب ء هـ و ط ، ء ب ح ط و ح يكافئ المنشور القائم الثلاثى المناظر له وحيث ان المنشورين الثلاثيين القائمين متكافئان كما ذكر أولا فيكون المائلان كذلك وهو المطلوب

نتيجة ١ ـ مساحة المنشور الثلاثى تساوى حاصل ضرب مقاس قاعدته فى مقاس ارتفاعه وذلك لانه لما كان متوازى السطوح يتركب من منشورين ثلاثيين متكافئين متحدين معه فى الارتفاع ومجموع قاعدتيهما مساو لقاعدته كانت مساحة أيهما تساوى نصف مساحة متوازى السطوح فاذا دلت ن على قاعدة المنشور الثلاثى ودل ع على ارتفاعه تكون مساحة متوازى السطوح مساوية ٢ ن × ع وتكون مساحة المنشور الثلاثى مساوية الى

$$\frac{1}{2} \text{ ٢ ن} \times \text{ع} = \text{ن} \times \text{ع}$$

نتيجة ٢ ـ مساحة أىّ منشور تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه (شكل ٢٥٥) وذلك لانه يمكن تقسيمه بواسطة المستويات القطرية هـَ حَ هـ ح و هـَ بَ هـ ب الى منشورات ثلاثية متحدة معه فى الارتفاع وحيث ان مساحة كل واحد منها تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه وان مجموع قواعدها عبارة عن قاعدة المنشور فيكون مجموع هذه المسائح أو المساحة المطلوبة مساوية حاصل ضرب قاعدة المنشور فى ارتفاعه


ش ٢٥٥

نتيجة ٣ ـ ويمكن أخذ مساحة المنشور أيضا بواسطة ضرب طول حرفه فى القطع العمودى عليه كما فى نمرة (٣٠٥)

تنبيه ـ المساحة السطحية الجانبية للمنشور تساوى مجموع مسائح أوجهه المتركب هو منها وفى حالة ما تطلب المساحة السطحية الكلية للمنشور فانه يضم الى ماسبق مساحة القاعدتين

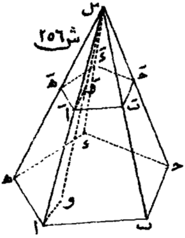
الفصل الخامس
(فى قياس الهرم)

دعوى نظرية

(٣٠٩) اذا قطع الهرم بمستو مواز لقاعدته فان أحرفه وارتفاعه تنقسم به الى أجزاء متناسبة ويكون شكل القطع مشابها للقاعدة (شكل ٢٥٦)

اذا كان س ا ب ح ء هـ هرما ما و اَ بَ حَ ءَ هـَ قطعا موازيا قاعدته و س و و س وَ ارتفاعى الهرمين الكلى والاصغر وتصور تمرير مستو بالحرف س ا وبالارتفاع س و فانه يقطع القاعدة والقطع فى المستقيمين ا و و اَ وَ المتوازيين ثم اذا لاحظنا بعد ذلك

أن المستقيمات أَ بَ و بَ حَ و حَ دَ و دَ هَ و ... الخ موازية بالتناظر للمستقيمات أ ب و ب ح و ح د و د هـ و ... الخ نرى أن المثلثات س أَ بَ و س بَ حَ و س حَ دَ و ... الخ مشابهة للمثلثات س أ ب و س ب ح و س ح د و ... الخ وبناء عليه تحدث سلسلة التناسبات الآتية



شكل ٢٥٦

$$\frac{\text{س أ}}{\text{س أَ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \frac{\text{س ب}}{\text{س بَ}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{بَ حَ}} = \frac{\text{س ح}}{\text{س حَ}}$$

$$= \frac{\text{ح د}}{\text{حَ دَ}} = \frac{\text{س د}}{\text{س دَ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{دَ هَ}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{س هَ}} = \frac{\text{س ح}}{\text{س حَ}}$$

ومن هذه السلسلة ينتج

أولا ــ أن أحرف الهرم وارتفاعه منقسمة الى أجزاء متناسبة بالمستوى القاطع

ثانيا ــ ان الزوايا المتناظرة من القاعدة والقطع متساوية وأن الاضلاع فيهما متناسبة وبذلك يكونان متشابهين وهو المراد

نتيجة ١ ــ اذا قطع هرمان متحدا الارتفاع بمستويين موازيين لقاعدتيهما ومتباعدين عنهما ببعد واحد فان النسبة بين القطعين تكون مساوية للنسبة بين القاعدتين

لانه اذا دل ع على ارتفاع الهرمين المشترك و عَ على بعد رأس كل هرم عن مستوى القطع و ح و حَ على مساحتى القاعدتين و د و دَ على مساحتى القطعين حدث على مقتضى النظرية السابقة أن

$$\frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}^2}{\text{عَ}^2} \text{ ، } \frac{\text{حَ}}{\text{دَ}} = \frac{\text{ع}^2}{\text{عَ}^2} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{\text{حَ}}{\text{دَ}}$$ وهو المراد

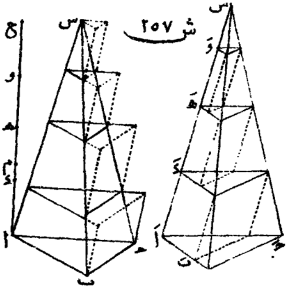
نتيجة ٢ ــ اذا كان القاعدتان متكافئتين يكون القطعان كذلك

دعوى نظـــــــرية

(٣١٠) الهرمان الثلاثيان المتكافئان فى القاعدة والمتحـــدان فى الارتفاع متكافئان (شكل ٢٥٧)

نفرض أن قاعدتى الهرمين ا ب ح و اَ بَ حَ فى مســتو واحد وأن ارتفاعهما المشترك هو ا ع فاذا قيل بعدم تكافئ الهرمين المذكورين وأن س ا ب ح هو أكبرهما فنفرض أن الفرق بينهما يكافئ منشورا ثلاثيا قاعدته ا ب ح وارتفاعه ا م ثم نقسم الارتفاع ا ع

الى أجزاء متساوية بحيث يكون كل جزء منها أقل من ا م وغد من نقطة التقاسيم مستويات موازية لمستويى القاعدتين فتكون القطاعات الحادثة متكافئة (٣٠٩ نتيجة ٢)

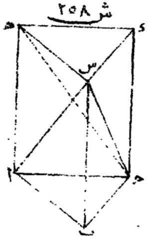


ثم اذا اعتبرنا كلا من قاعدة الهرم الاول وقطاعاته قواعد وأنشأنا عليها مناشير ثلاثية خارجة فانه يتشكل على الهرم المذكور أربع مناشير ثلاثية متحدة فى الارتفاع ومجموعها يكون أكبر منه ضرورة وكذا اذا اعتبرنا قطاعات الهرم الثانى دون قاعدته كأنها قواعد وأنشأنا عليها مناشير ثلاثية داخلة فانه يتشكل داخل الهرم المذكور ثلاث مناشير ثلاثية متحدة فى الارتفاع ومجموعها أقل منه وبناء على ماذكر يكون الفرق بين مجموع المناشير فى الهرم الثانى وبين مجموعها فى الاول أكبر بكثير من الفرق بين الهرمين ولو تأملنا فى الشكل نرى أن المنشور الثانى من الهرم الاول يكافئ المنشور الاول من الهرم الثانى لتكافئ قاعدتيهما واتحادهما فى الارتفاع وكذا نرى أن الثالث من الهرم الاول يكافئ الثانى من الهرم الثانى والرابع يكافئ الثالث وحينئذ يكون الفرق بين المناشير فى الهرمين منشورا ثلاثيا قاعدته ا ب حـ وارتفاعه ا ى وهو أصغر من المنشور الذى قاعدته ا ب حـ وارتفاعه ا م الذى اعتبر فرقا بين الهرمين لكنه يؤخذ مما سبق تقريره أن المنشور الذى قاعدته ا ب حـ وارتفاعه ا ى يجب أن يكون أكبر بكثير من المنشور الذى قاعدته ا ب حـ وارتفاعه ا م وهو محال وبناء عليه فلا يكون للفرض الذى انبنى عليه تلك النتيجة محلا أعنى أنه لا يمكن أن يكون الهرم س ا ب حـ أكبر من الهرم سَ اَ بَ حَ وبمثل ذلك يبرهن على أن الثانى لا يمكن أن يكون أكبر من الاول فيكونان اذن متكافئين وهو المراد

دعوى نظـــــــرية

(٣١١) الهرم الثلاثى هو ثلث المنشور الثلاثى المتحد معه فى القاعدة وفى الارتفاع (شكل ٢٥٨) اذا كان سـ ا ب حـ هرما ثلاثيا معلوما ومد من نقطة سـ مستو مواز لقاعدته ا ب حـ ومن نقطتى ا , حـ مستقيمان موازيان للحرف سـ ب ومدا على استقامتهما حتى يتلاقيا

مع المستوى س ء ه فانه يتشكل من ذلك منشور ثلاثى متحد مع الهرم المعلوم فى القاعدة وفى الارتفاع ويطلب البرهنة على أنه يتركب من ثلاثة اهرامات ثلاثية كل واحد منها يكافئ الهرم المعلوم س ا ب ح



لذلك يقال اذا تصورنا حذف الهرم المعلوم من المنشور الثلاثى فان الباقى يكون هرما رباعيا رأسه س وقاعدته متوازى الاضلاع ا ح ء ه فاذا مررنا المستوى س ه ح فان الهرم الرباعى ينقسم الى هرمين ثلاثيين متحدين فى الارتفاع ومتساويين فى القاعدة فيكونان متكافئين واذن فلم يبق سوى البرهنة على أن أحد هذين الهرمين يكافئ الهرم المعلوم

وللوصول الى ذلك يقال ان الهرم س ء ه ح يمكن اعتبار رأسه ح وقاعدته ء س ه وحيث ان المثلث س ء ه = ا ب ح فيكون الهرمان متكافئين لاتحادهما أيضا فى الارتفاع

نتيجة ١ ـ ينتج مما ذكر أن مساحة الهرم الثلاثى تساوى ثلث مساحة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه فاذا كانت قاعدته ن وارتفاعه ع تكون مساحته مساوية الى $\frac{1}{3}$ ن × ع

نتيجة ٢ ـ حيث ان أى هرم يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية بواسطة المستويات التى تمر برأسه وبأقطار قاعدته الخارجة من رأس واحدة منها وأن مساحة كل واحد من هذه الاهرامات الثلاثية تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه فيكون مجموعها أى مساحة الهرم الكلى مساويا لثلث حاصل ضرب مجموع قواعدها فى ارتفاعها المشترك بينها وحيث ان هذه الاهرامات متحدة مع الهرم الاصلى فى الارتفاع وان مجموع قواعدها يدل على قاعدة الهرم المذكور فتكون مساحته تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

نتيجة ٣ ـ يستفاد مما تقدم أن أى هرم يمكن اعتباره كأنه ثلث المنشور المتحد معه فى القاعدة وفى الارتفاع

تنبيه ـ المساحة السطحية الجانبية للهرم هى مجموع مسائح أوجهه المركب هو منها ويضم الى ذلك اذا اقتضى الحال مساحة القاعدة التى يمكن أن تكون شكلا ما اذا أريد الحصول على المساحة السطحية الكلية غير أن تلك المساحة تختصر أحيانا فيما اذا كان الهرم المعلوم منتظما لان أوجهه تكون فى هذه الحالة مثلثات متساوية الساقين ومتساوية وحينئذ فيكتفى الحال لاخذ مساحة أحدها وضرب الناتج فى عددها ويضم الى الناتج مساحة القاعدة فى حالة ما يراد الحصول على المساحة السطحية الكلية

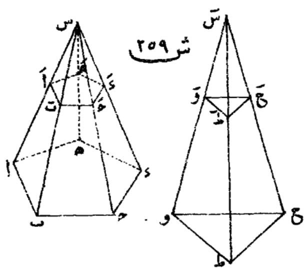
الفصل السادس

(في كثيرات السطوح المحدبة)

(٣١٢) متى علمت مساحة الهرم الثلاثي فانه يمكن بواسطتها الحصول على مساحة أي كثير سطوح محدب معلوم وذلك لانه مهما كان كثير السطوح المحدب المعلوم فانه يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية بواسطة مستقيمات تصل بين أحد رؤسه وسائر رؤسه الاخر ولنتكلم الآن عن بعض أحوال خصوصية يكون للمساحة فيها قانون بسيط

دعوى نظرية

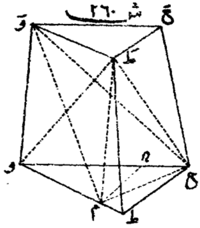
(٣١٣) اذا قطع أي هرم بمستو موازٍ لقاعدته وحذف الهرم الاصغر فان الهرم الناقص الباقي يتركب من ثلاثة اهرامات متحدة معه في الارتفاع وأما قواعدها فهي قاعدتا الهرم الناقص العليا والسفلى والوسط المتناسب بينهما



ليكن س ا ب ح ء ه (شكل ٢٥٩) هرما مقطوعا بالمستوى اَ بَ حَ ءَ هَ الموازي لقاعدته وليكن سَ و ع ط هرما آخر ثلاثيا متحدا مع الاول في الارتفاع ومكافئا له في القاعدة ثم يفرض وجود قاعدتيهما في مستو واحد فاذا مد المستوى القاطع اَ بَ حَ ءَ هَ فانه يحدد على الهرم الثاني القطع وَ عَ طَ الذي يكون بعده عن مستوى القاعدة مساويا ضرورة لبعد القطع اَ بَ حَ ءَ هَ عن مستوى القاعدة ا ب ح ء ه وحينئذ يكون القطعان متكافئين وبناء عليه يكون الهرمان س اَ بَ حَ ءَ هَ و سَ وَ عَ طَ متكافئين أيضا لتكافئ قاعدتيهما واتحادهما في الارتفاع فاذا حذفا من الهرمين الكليين كان الباقيان وهما الهرمان الناقصان ا ب ح ء ه اَ بَ حَ ءَ هَ , و ع ط وَ عَ طَ متكافئين واذن فيكفي البرهنة على منطوق النظرية على الهرم الثاني الناقص فنقول

ليكن و ع ط وَ عَ طَ الهرم الثاني الناقص المعلوم (شكل ٢٦٠) فنتصور بالنقط الثلاثة و , ع , طَ تمر بمستو فانه يحدد أحد الاهرامات الثلاثة الثلاثية طَ و ع ط لانه متحد

مع الهرم الناقص المذكور فى الارتفاع وقاعدته القاعدة السفلى له و ط ح فاذا حذف هذا



الهرم من الهرم الكلى فالباقى بعد ذلك يكون هرما رباعيا رأسه طَ وقاعدته و ح وَ حَ ثم اذا تصورنا أيضا غير مستو بالنقط الثلاثة وَ و حَ و طَ فان هذا الهرم الرباعى ينقسم الى هرمين ثلاثيين أحدهما طَ وَ حَ ح وثانيهما طَ وَ ح و أما الاول فانه يمكن اعتبار رأسه ح وقاعدته وَ حَ طَ وهو متحد مع الهرم الناقص فى الارتفاع وقاعدته القاعدة العليا له واذن فهو ثانى الاهرامات الثلاثية الثلاثة وأما الثانى فهو يكافئ الهرم الذى رأسه م وقاعدته وَ ح و لاتحادهما فى القاعدة وفى الارتفاع لوجود رأسيهما طَ و م على مستقيم مواز للقاعدة غير أن هذا الهرم الاخير يمكن اعتبار رأسه وَ وقاعدته ح و م وهو هرم متحد مع الهرم الناقص فى الارتفاع فاذا برهن على أن قاعدته ح و م وسط متناسب بين القاعدتين و ح ط و وَ طَ حَ ثبت المطلوب ولذلك يقال يمد من نقطة م المستقيم م ى موازيا ط ح فيكون المثلث و م ى = المثلث وَ حَ طَ ثم يؤخذ من المثلثين و ح ط و و ح م المتحدين فى الارتفاع أن

$$\frac{\text{و ح ط}}{\text{و ح م}} = \frac{\text{و ط}}{\text{و م}}$$

وكذا يؤخذ من المثلثين و ح م و و ى م المتحدين فى الارتفاع أن

$$\frac{\text{و م ح}}{\text{و م ى}} = \frac{\text{و ح}}{\text{و ى}} = \frac{\text{و ط}}{\text{و م}}$$

ومن هذين التناسبين ينتج

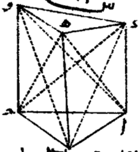
$$\frac{\text{و ح ط}}{\text{و ح م}} = \frac{\text{و ح م}}{\text{و م ى}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{و ح ط}}{\text{و ح م}} = \frac{\text{و ح م}}{\text{وَ حَ طَ}}$$ وهو المراد

نتيجة ـ اذا رمزنا بالرمزين ں و ںَ لقاعدتى الهرم الناقص و ع لارتفاعه تحصل

مساحة الهرم الناقص $= \frac{\text{ع}}{٣} (\text{ں} + \text{ںَ} + \sqrt{\text{ں ںَ}})$

دعوى نظرية

(٣١٤) كل منشور ثلاثى ناقص يتركب من ثلاث اهرامات ثلاثية متحدة جميعها معه فى القاعدة السفلى وأما رؤسها فهى رؤس القاعدة العليا له (شكل ٢٦١)


ش ٢٦١

ليكن ا ب حـ د هـ و المنشور الثلاثى الناقص المعلوم

أولا ـ المستوى هـ حـ ا يفصل من الجسم الهرم ا هـ حـ ب وهو أحد الاهرامات الثلاثة الثلاثية والباقى بعد حذفه هو الهرم الرباعى هـ و د ا حـ الذى ينقسم بالمستوى د هـ حـ الى هرمين ثلاثيين

ثانيا ـ الهرم هـ د ا حـ يكافئ الهرم ب د ا حـ لاتحادهما فى القاعدة د حـ ا ولوجود رأسيهما على المستقيم هـ ب الموازى للقاعدة فيكونان متحدين فى الارتفاع غير أن هذا الهرم الثانى يمكن اعتبار رأسه د وقاعدته ا ب حـ وهو ثانى الاهرامات الثلاثية

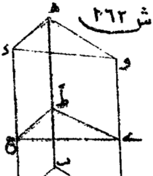
ثالثا ـ الهرم هـ د و حـ يكافئ الهرم ب د و حـ وهذا يمكن اعتبار رأسه د وقاعدته و حـ ب لكن هذا الاخير يكافئ الهرم ا و حـ ب لاتحادهما فى القاعدة والارتفاع وهو يمكن اعتبار رأسه و وقاعدته ا ب حـ وهو الهرم الثالث

نتيجة ١ ـ اذا كانت الاحرف و حـ و هـ ب و د ا عمودية على مستوى القاعدة ب حـ فان المساحة الجمية للمنشور الناقص تساوى $\frac{1}{3}$ ا ب حـ × و حـ + $\frac{1}{3}$ ا ب حـ × هـ و + $\frac{1}{3}$ ا ب حـ × د ا أو تساوى $\frac{1}{3}$ ا ب حـ (و حـ + هـ ب + د ا)

أو اذا رمز بالرمز ن لقاعدة المنشور وبالرموز ع و عَ و عً للارتفاعات و حـ و هـ ب و د ا يحدث

$$\text{المساحة الجمية للمنشور الناقص} = \frac{\text{ن}}{3}(\text{ع} + \text{عَ} + \text{عً}) = \frac{\text{ن}(\text{ع} + \text{عَ} + \text{عً})}{3}$$

نتيجة ٢ ـ اذا لم تكن الاحرف عمودية على مستوى القاعدة ا ب حـ كما فى (شكل ٢٦٢) فانه يقطع المنشور بمستو عمودى على أحرفه فينقسم بذلك الى منشورين ناقصين د هـ و ح ط ى و ا ب حـ ح ط ى أحرفها عمودية على مستوى القاعدة المشتركة ويحدث بناء على ما تقرر فى النتيجة الاولى أن


ش ٢٦٢

مساحة و د هـ ح ط ى = ح ط ى $\left(\frac{\text{و ى + هـ ط + د ح}}{3}\right)$

ومساحة ا ب حـ ح ط ى = ح ط ى $\left(\frac{\text{حـ ى + ب ط + ا ح}}{3}\right)$

وتكون المساحة الكلية للمنشور الناقص ا ب حـ د هـ و =

ح ط ى $\left(\frac{\text{و حـ + هـ ب + د ا}}{3}\right)$

أعنى أن المساحة الجمية للمنشور الناقص تساوى حاصل ضرب القطع العمودى على أحرفه فى ثلث مجموع أحرفه الثلاثة

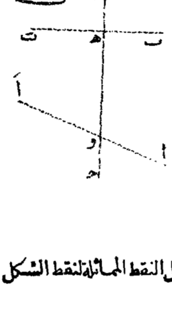
الفصل السابع

(فى التماثل)

تعاريف

(٣١٥) النقطتان المتماثلتان بالنسبة لمستقيم هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما عمودا على مستقيم التماثل ومنقسما به الى قسمين متساويين (شكل ٢٦٣) ويسمى مستقيم التماثل بمحور التماثل

ش ٢٦٣



الشكل ح المماثل للشكل و المعلوم بالنسبة لمحور تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المحور

(٣١٦) النقطتان المتماثلتان بالنسبة لنقطة تماثل هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما مارا بنقطة التماثل ومنقسما بها الى قسمين متساويين (شكل ٢٦٤) ونقطة التماثل هذه تسمى بمركز التماثل

الشكل ح المماثل للشكل و المعلوم بالنسبة لمركز تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المركز

(٣١٧) النقطتان المتماثلتان بالنسبة لمستو هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما عمودا على مستوى التماثل ومنقسما بنقطة تقابله به الى قسمين متساويين (شكل ٢٦٦) ويسمى المستوى المذكور بمستوى التماثل

الشكل ح المماثل لآخر معلوم بالنسبة لمستوى تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المستوى

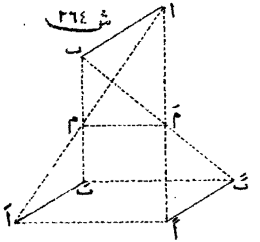
* دعوى نظرية

* (٣١٨) الشكلان المتماثلان بالنسبة لمحور تماثل متساويان (شكل ٢٦٣)

* ليكن ا و ب و ... الخ نقط الشكل و المعلوم و اَ و بَ و ... الخ النقط
* المماثلة لها من الشكل وَ و حـ ء محور التماثل
* فاذا فرضنا ارتباط الشكل وَ بمحور التماثل ودورناه حوله بمقدار زاويتين قائمتين فان
* المستقيم اَو العمودى على محور التماثل لايزال فى أثناء الدوران وبعده عمودا عليه وحينئذ
* فينطبق على مساويه و ا وبعين هذا السبب ينطبق أيضا بَو على و ب وهكذا
* واذن فتنطبق جميع نقط الشكل وَ على مماثليها من الشكل و وبعد دورة مقدارها قائمتان
* واذن فلا يكون الشكل وَ شيأ آخر خلاف الشكل و

* دعوى نظـــــــرية

* (٣١٩) الشكلان المماثلان لثالث بالنسبة لمركزى تماثل مختلفين متساويان (شكل ٢٦٤)



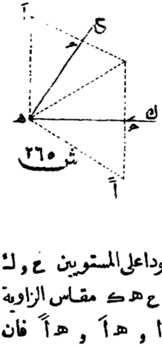
* ليكونا م و مَ مركزى تماثل مختلفين و ا
* و ب و ... الخ نقط الشكل و و اَ و
* بَ و ... الخ النقط المماثلة لها من الشكل
* وَ المماثل للشكل و بالنسبة لمركز التماثل
* م و اً و بً و ... الخ النقط المماثلة لها
* أيضا من الشكل وً المماثل للشكل و بالنسبة
* لمركز التماثل مَ والمطلوب البرهنة على أن
* الشكلين وَ و وً متساويان
* فيقال حيث ان المستقيم م مَ جامع بين وسطى الضلعين ا اَ و ا اً من المثلث ا اَ اً
* فيكون موازيا اَ اً ومساويا لنصفه وكذا يكون موازيا بَ بً ومساويا لنصفه وهكذا
* وحينئذ اذا أعطى الشكل وً حركة انتقالية بحيث ترسم جميع نقطه مستقيمات موازية
* م مَ ومساوية ضعفه فان جميع نقطه تنطبق على المناظرة لها من الشكل وَ وبناء عليه
* فالشكلان متساويان وهو المراد

* نتيجة ١ — ينتج من هذه النظرية أن تعيين الشكل المماثل لآخر لا يرتبط بمركز تماثل معين
* نتيجة ٢ — يمكن أن يستنتج مما ذكر مقدار عظيم من النتائج المهمة وهى
* أولا — الشكل المماثل المستقيم معلوم ا ب هو مستقيم مساوله وتكون هذه النظرية
* بديهية اذا اختير مركز التماثل وسط المستقيم

* ثانيا ـ الشكل المماثل لزاوية هو زاوية مساوية لها وتكون هذه النظرية بديهية اذا اختير
* رأس الزاوية مركز التماثل
* ثالثا ـ الشكل المماثل لكثير أضلاع هو كثير أضلاع مساو له وتنتج هذه النظرية من
* سابقتها
* رابعا ـ الشكل المماثل لمستو هو مستو وتكون هذه النظرية واضحة بنفسها اذا اختير
* مركز التماثل على المستوى
* خامسا ـ الشكل المماثل لزاوية زوجية هو زاوية زوجية مساوية لها وتكون هذه
* النظرية بديهية اذا اختير مركز التماثل على حرف الزاوية الزوجية
* سادسا ـ الشكل المماثل لزاوية مجسمة كثيرة الاوجه هى زاوية أخرى مجسمة كثيرة الاوجه
* تكون جميع أجزائها متساوية غير أنها متخالفة في ترتيب الوضع

* ## دعوى نظـــــــرية

* (٣٢٠) الشكلان المماثلان لثالث بالنسبة لمستويى تماثل مختلفين متساويان (شكل ٢٦٥)
* ليكونا ع و ك مستويى التماثل و ا و ب و ... الخ
* النقط المختلفة من الشكل و و اَ و بَ و ... الخ
* النقط المناظرة لها من الشكل وَ المماثل للشكل و بالنسبة
* لمستوى التماثل ع و اً و بً و ... الخ النقط المناظرة
* للنقط الاولى أيضا من الشكل وً المماثل للشكل و بالنسبة
* لمستوى التماثل ك ويطلب البرهنة على أن الشكلين
* وَ و وً متساويان



ش ٢٦٥

* فيقال اذا مررنا مستويا بالمستقيمين ا اَ و ا اً فانه يكون عمودا على المستويين ع و ك
* واذن فيكون عمودا على خط تقاطعهما وبذلك تكون زاوية ع ه ك مقاس الزاوية
* الزوجية الواقعة بين المستويين ع و ك ثم اذا وصل ه ا و ه اَ و ه اً فان
* المثلث ه ا اَ يكون متساوى الساقين وتكون نقطة ح وسط المستقيم ا اَ واذن
* تكون زاوية ع ه ا = زاوية ع ه اَ وكذا حيث ان المثلث ا ه اً متساوى الساقين
* ونقطة حَ في وسط الضلع ا اً تكون زاوية ك ه ا = زاوية ك ه اً وحينئذ
* تكون زاوية بَ هَ بً = ٢ ع هَ ك = ٢ ع ه ك وهكذا

اذا تقرر هذا وفرض ارتباط الشكل وً بالمستوى لـَ ثم صار تدوير هذا المستوى حول نقطة هـ المشتركة بمقدار زاوية تساوى ضعف الزاوية الواقعة بين المستويين فان جميع نقط الشكل وً مثل اً و بً و ... الخ تنطبق على النقط اَ و بَ و ... الخ المناظرة لها من الشكل وَ واذن فالشكلان وَ و وً متساويان وهو المراد

نتيجة ١ ـ ينتج مما ذكر أن تعيين الشكل المماثل لآخر لا يرتبط بمستوى تماثل معين

نتيجة ٢ ـ يمكن أن يستنتج مما تقدم مقدار عظيم من النتائج المهمة وهى

أولا ـ الشكل المماثل لمستقيم هو مستقيم مساو له وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اشتمل مستوى التماثل على المستقيم

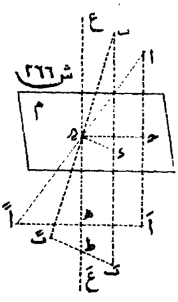
ثانيا ـ الشكل المماثل لزاوية هو زاوية مساوية لها وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اعتبر مستوى التماثل نفس مستوى الزاوية

ثالثا ـ الشكل المماثل لضلع هو مضلع مساو له وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اعتبر مستوى التماثل نفس مستوى المضلع

رابعا ـ الشكل المماثل لمستو هو مستو وتكون هذه النظرية بديهية اذا اعتبر المستوى المعلوم مستوى التماثل

خامسا ـ الشكل المماثل لزاوية زوجية هو زاوية زوجية مساوية لها وتسهل البرهنة على ذلك اذا اعتبر المستوى المنصف لها مستوى التماثل

دعوى نظرية



(٣٢١) الشكلان المماثلان لثالث أحدهما بالنسبة لمستو وثانيهما بالنسبة لنقطة متساويان (شكل ٢٦٦)

ليكن م مستوى التماثل وحيث ان اختيار مركز التماثل لا يرتبط به تعيين الشكل المماثل فنأخذه فى نقطة ﻫ على المستوى م وليكن ا و ب و ... الخ نقط الشكل و و اَ و بَ و ... الخ النقط المناظرة لها من الشكل وَ المماثل للشكل و بالنسبة للمستوى م و اً و بً و ... الخ النقط المناظرة

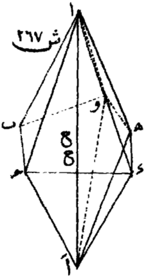
* للاولى أيضا من الشكل وً المماثل للشكل و بالنسبة لمركز التماثل ﮦ فنمد من نقطة
* ﮦ المستقيم ع عَ عمودا على المستوى م ثم نصل ﮦ ح و ا اً فمن حيث ان المستقيم
* ع عَ عمود على المستوى فيكون موازيا ا اَ وحينئذ فيكون موجودا بتمامه فى المستوى
* ا اَ اً ولتكن هـ النقطة التى يتقابل فيها مع اَ اً ومن حيث ان نقطتى ﮦ و ح
* موجودتان فى منتصفى المستقيمين ا اً و ا اَ فيكون المستقيم اَ اً موازيا ﮦ ح
* وبناء عليه يكون عمودا على ع عَ ومن جهة أخرى حيث كانت ﮦ منتصف ا اً وكان
* ع عَ موازيا ا اَ تكون نقطة هـ فى منتصف اَ اً وبناء عليه فيكون النقطتان
* اَ و اً متماثلتين بالنسبة لمحور التماثل ع عَ وينطبق هذا البرهان على نقط أخرى
* متناظرة من الشكلين وَ و وً ويكون الشكلان المذكوران متماثلين بالنسبة لمحور
* التماثل ع عَ واذن فهما متساويان (٣١٨)
* نتيجة ١ ـ ينتج من هذه النظرية ومن المتقدمتين عليها أن أى شكل لا يكون له الا شكل
* واحد مماثل له ولايجاد هذا الاخير ينتخب اما مستو أو نقطة للتماثل تكون موافقة للاعمال
* المقتضى اجراؤها
* نتيجة ٢ ـ يمكن استنتاج نظرية (نمرة ٣٢٠) من هذه النظرية لانه اذا كان الشكلان
* وَ و وً مماثلين للشكل و بالنسبة للمستويين ع و لـ واعتبرنا الشكل وً المماثل
* للشكل و بالنسبة لمركز التماثل ﮦ فيكون مماثلا لكل واحد من الشكلين وَ و وً
* واذن فيكونان متساويين

* دعوى نظـــــــرية

* (٣٢٢) كثيرا السطوح المتماثلان يكون فيهما
* أولا ـ الاوجه المتناظرة متساوية ـ وثانيا ـ زواياهما الزوجية المتناظرة متساوية
* وثالثا ـ أحرفهما المتناظرة متساوية ـ ورابعا ـ تكون زواياهما المجسمة مركبة
* من أجزاء متساوية وموضوعة فى جهات متضادة
* وهذه النظرية تنتج مما سبق ذكره من أن الشكل لا يكون له الا شكل واحد مماثل له فقط
* ومن النتائج التى ذكرت (بنمرتى ٣١٩ و ٣٢٠ نتيجة ٢)
* نتيجة ـ كثيرا السطوح المتماثلان يتركبان من عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتماثلة
* لانه اذا تشكل من أربع نقط من الشكل و هرم ثلاثى فان النقط المماثلة لها من الشكل وَ
* يتركب منها هرم ثلاثى أيضا

دعوى نظـــــرية

(٣٢٣) كثيرا السطوح المتماثلان متكافئان (شكل ٢٦٧)



أولا ـ نفرض هرما معلوما ا ب حـ ء هـ و ونرسم الهرم المماثل له بجعل قاعدته ب حـ ء هـ و مستوى التماثل فيتشكل من ذلك الهرم أ ب حـ ء هـ و المتحد مع الاول فى القاعدة وفى الارتفاع لان ا ع = أ ع فيكونان متكافئين

ثانيا ـ حيث ان كثيرى السطوح المتماثلين يتركبان من عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتماثلة فهما اذن متكافئان

الفصـــل الثامن

(فى التشـــابه)

تعـــاريف

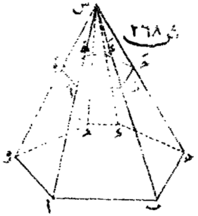
(٣٢٤) كثيرا السطوح المتشابهان هما اللذان تكون أوجههما المتناظرة متشابهة وزواياهما الجسمة المتناظرة متساوية ونعنى هنا بالزوايا الجسمة المتناظرة الزوايا الجسمة المتشكلة من الاوجه المتناظرة المتشابهة وتسمى رؤس زوايا هذه الجسمات بالرؤس المتناظرة والمستقيمات الواصلة بين رؤس متناظرة تسمى بالمستقيمات المتناظرة والاوجه المتناظرة هى الاوجه التى تكون متشابهة والزوايا الزوجية المتناظرة من كثيرى السطوح المتشابهين متساوية

(٣٢٥) حيث ان الزوايا الجسمة المتناظرة متساوية على مقتضى تعريف تشابه كثيرى السطوح فتكون الاجزاء المتساوية فيهما موضوعة على ترتيب واحد واذن فتكون الاوجه المتناظرة من كثيرى السطوح المتشابهين موضوعة على نظم وترتيب واحد

دعوى نظـــرية

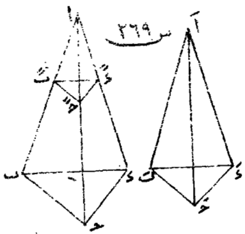
(٣٢٦) اذا قطع هرم بمستو مواز لقاعدته فانه يحدد عليه هرما جديدا مشابها للاول (شكل ٢٦٨)

* فاذا قطع الهرم س ا ب ح د هـ و بمستو موازٍ قاعدته فانه يبرهن على أن الهرم
* س أَ بَ حَ دَ هَ وَ مشابه للاول
* ولذلك يقال أولا انه بناء على ما تقدم (بنمرة ٣٠٩)
* تكون أوجه الهرمين متشابهة النظير لنظيره
* ثانيا ـ ان فيهما الزاوية المجسمة س مشتركة
* ولكون الزوايا المستوية المتناظرة من المجسمتين
* ا و أَ متساوية وموضوعة على ترتيب واحد تكونان
* متساويتين وكذا يتساوى فيهما باقى الزوايا المجسمة
* المتناظرة أى ان ب = بَ و ح = حَ و د = دَ
* وهكذا و بناء عليه فيكون الهرمان متشابهين (٣٢٤)



دعوى نظـــــرية

* (٣٢٧) يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا تساوى منهما زاويتان زوجيتان متناظرتان وكانتا
* محصورتين بين أوجه متشابهة فيهما وموضوعة على ترتيب واحد (شكل ٢٦٩)
* اذا كانت الزاوية الزوجية ا ب تساوى
* الزاوية الزوجية أَ بَ وكان الوجه ا ب ح
* مشابها للوجه أَ بَ حَ والوجه ا ب د
* مشابها للوجه أَ بَ دَ يكون الهرمان
* متشابهين
* وللبرهنة على ذلك يؤخذ البعد اً بً = البعد
* أَ بَ ويمر من نقطة بً مستو موازٍ للقاعدة
* ب ح د فالهرم الثلاثى اً حً دً يكون
* على مقتضى النظرية السابقة مشابها للهرم

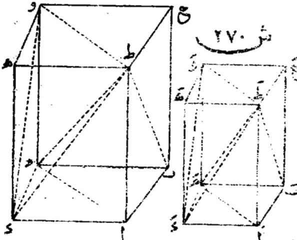


* ا ب ح د وبناء عليه فقد آل الامر الى البرهنة على أن الهرم اً بً حً دً مساوٍ للهرم
* أَ بَ حَ دَ وللوصول الى ذلك يقال ان المثلثين اً بً حً و أَ بَ حَ فيهما اً بً = أَ بَ
* عملا والزاوية بً اً حً = بَ أَ حَ فرضا والزاوية اً بً حً = ا ب ح = أَ بَ حَ
* فرضا أيضا واذن فهما متساويان وبمثل ذلك يبرهن على تساوى المثلثين اً بً دً و أَ بَ دَ

* وحيث كانت الزاوية الزوجية اَ تساوى الزوجية اب فرضا فيكون الهرمان
* الثلاثيان ا ىَ حَ ىَ , اَ بَ حَ ىَ متساويين
* نتيجة - يمكن ارتكانا على هذه النظرية وعلى ماقيل فى تعريف كثيرات السطوح المتشابهة
* أن يبرهن على النظريات الآتية وهى
* الاولى - يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا تناسبت أحرفهما المتناظرة وتشابهت وضعا
* الثانية - يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا شابه وجه من أحدهما نظيره من الآخر وكانت
* الزوايا الزوجية الثلاثة المجاورة له مساوية لنظائرها من الثانى ومتشابهة وضعا
* الثالثة - يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا تساوت فيهما جميع الزوايا الزوجية المتناظرة
* وتشابهت وضعا

دعوى نظرية

* (٣٢٨) كثيرا السطوح المركبان من عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتشابهة صورة
* ووضعا متشابهان أعنى أن أوجههما المتناظرة متشابهة وزواياهما المجسمة المتناظرة
* متساوية (شكل ٢٧٠)



* ليكن ط ا ب ح , ط ا ى ح ,
* ط ح ى و , ط ى هـ و , ... الخ
* الاهرامات المتركب منها كثير
* السطوح الاول , طَ اَ ىَ حَ
* وطَ حَ ىَ وَ وطَ ىَ هـَ وَ , ... الخ
* الاهرامات المتركب منها كثير
* السطوح الثانى
* أولا - المثلثان ى ح ا , ا ح ب المتركب منهما الوجه ا ب ح ى من كثير السطوح
* الاول يشابهان مع المناظر المثلثين ىَ حَ اَ , اَ حَ بَ الموجودين على سطح كثير السطوح
* الثانى بسبب تشابه الاهرامات الثلاثية وزيادة على ذلك حيث ان المثلثين ى ح ا , ا ح ب
* موجودان فى مستو واحد فيجب أن يكون المثلثان ىَ حَ اَ , اَ حَ بَ كذلك
* وللبرهنة على ذلك يقال حيث ان الهرمين الثلاثيين ط ح ا ى , ط ا ب ح يشابهان
* الهرمين طَ حَ اَ ىَ , طَ اَ بَ حَ فرضا فتكون الزاويتان الزوجيتان ط ح ا ى

* و ط ح ا ب مساويتين بالتناظر للزوجيتين طَ حَ اَ ءَ , طَ حَ اَ بَ وحيث كان مجموع
* الاولين مساويا قائمتين فيكون مجموع الاخرين كذلك وبناء عليه فيكون كثيرا الاضلاع
* ا ب ح , اَ بَ حَ ءَ متشابهين لتركبهما من عدد واحد من المثلثات المتشابهة صورة ووضعا
* وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقى أوجه كثيرى السطوح مأخونة مثنى

* ثانيا ـ يشاهد أن الزوجية ط ا التى هى مجموع الزوجيتين ح ط ا ء , ح ط ا ب *
* تساوى للزاوية الزوجية طَ اَ مجموع الزوجيتين حَ طَ اَ ءَ , حَ طَ اَ بَ وعلى العموم
* كل زوجيتين متناظرتين من كثيرى السطوح متساويتان لانها عبارة عن مجموع زوايا
* زوجية متناظرة متساوية ومن ذلك ينتج أن الزوايا المجسمة المتناظرة متساوية مثل ا , اَ
* لتساوى الزوايا المستوية فيهما المتناظرة ولتشابهها وضعا مع تساوى ميولها على بعضها

* دعوى نظـــــــرية

* (٣٢٩) وبالعكس ـ كثيرا السطوح المتشابهان يتركبان من عدد واحد من الاهرامات
* الثلاثية المتشابهة صورة ووضعا (شكل ٢٧٠)

* اذا اعتبرنا ط رأسا لكثير السطوح ا ب ح ء هـ و ح ط وقسمنا أوجهه الغير المجاورة
* للرأس ط الى مثلثات واعتبرنا كل واحد منها قاعدة لهرم ثلاثى رأسه ط فان كثير السطوح
* المذكور ينقسم الى اهرامات ثلاثية يتكون من مجموعها الجسم المذكور
* ولو أجرينا مثل ذلك فى كثير السطوح الثانى فاننا نشاهد انقسامهما الى عدد واحد من
* الاهرامات الثلاثية ولم يبق علينا سوى البرهنة على أن كل اثنين منها متناظرتين فى الجسمين
* متشابهان

* ولذلك يقال اذا قارنا الهرم الثلاثى ط ء ح ا بالهرم الثلاثى طَ ءَ حَ اَ نشاهد فيها أن
* المثلثين ط ء ا , ح ء ا يشابهان بالتناظر للمثلثين طَ ءَ اَ , حَ ءَ اَ بسبب تشابه
* الوجهين هـ ء ا ط , هـَ ءَ اَ طَ من جهة والوجهين ح ء ا ب , حَ ءَ اَ بَ من
* جهة أخرى وأن الزاوية الزوجية ء ا = الزاوية الزوجية ءَ اَ فرضا وحينئذ فيكون
* الهرمان المذكوران متشابهين (٣٢٧)
* ثم اذا انتقلنا الى الهرمين الثلاثيين ط ء ح و , طَ ءَ حَ وَ نشاهد فيهما تشابه المثلثين
* ط ء ح , طَ ءَ حَ لانهما وجهان متناظران من هرمين ثلاثيين متشابهين وكذا نشاهد
* تشابه الوجه و ء ح للوجه وَ ءَ حَ بسبب تشابه كثيرى الاضلاع هـ ء ح , وَ هـَ ءَ حَ

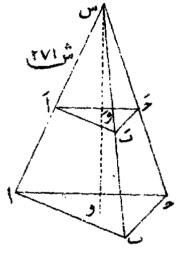
* وغير ذلك فان الزوجيتين و ء ح ا و وَ ءَ حَ اَ متساويتان فرضا والزوجيتان ط ء ح ا
* و طَ ءَ حَ اَ متساويتان بسبب تشابه الهرمين ط ء ح ا و طَ ءَ حَ اَ واذن يكون
* الهرمان الثلاثيان ط ء ح و و طَ ءَ حَ وَ متشابهين وهكذا

* تنبيه ١ ـ ومما يجب ملاحظته هنا هو أن التحليل المتقدم يمكن اجراؤه باعتبار أى رأسين
* متناظرين من كثيرى السطوح غير الرأسين ط و طَ كأنهما رأسان للجسمين

* تنبيه ٢ ـ ينتج من هذه النظرية أن النسبة بين أى مستقيمين متناظرين ا و اَ مثلا
* واصلين بين رأسين متناظرين من كل من كثيرى السطوح المتشابهين هى كالنسبة بين أى
* حرفين ب و بَ متناظرين فيهما وذلك لان المستقيمين المذكورين لابد أن يكونا حرفين
* متناظرين من هرمين ثلاثيين متشابهين عند تحليل كثيرى السطوح الى اهرامات ثلاثية
* متشابهة وحيث ان هذين الهرمين لابد أن يشتملا على حرفين متناظرين ح و حَ مثلا
* من كثيرى السطوح فيحدث $\frac{ا}{اَ} = \frac{ح}{حَ}$ وحيث ان أحرف كثيرى السطوح متناسبة
* فرضا لانهما متشابهان يكون $\frac{ح}{حَ} = \frac{ب}{بَ}$ أو $\frac{ا}{اَ} = \frac{ب}{بَ}$ وهو المراد

* دعوى نظرية

* (٣٣٠) النسبة بين الهرمين الثلاثيين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى حرفين متناظرين
* منهما (شكل ٢٧١)



* حيث ان الهرمين المذكورين متشابهان فانه يمكن
* وضع أصغرهما على الاكبر بحيث تكون الزاوية
* المجسمة س مشتركة بينهما واذن فتكون القاعدة
* اَ بَ حَ موازية للقاعدة ا ب ح لانقسام الاحرف
* س ا و س ب و س ح الى أجزاء متناسبة فى
* النقط اَ و بَ و حَ ثم يقال اذا رمزنا بالرمزين
* ع و عَ لحجمى الهرمين و ن و نَ لقاعدتيهما
* حدث

* $ع = \frac{1}{3} ن \times س و$ و $عَ = \frac{1}{3} نَ \times س وَ$ أو

* $$\frac{ع}{عَ} = \frac{ن \times س و}{نَ \times س وَ} = \frac{ن}{نَ} \times \frac{س و}{س وَ}$$

* وحيث ان القاعدتين ن و نَ متشابهتان يكون

* $\frac{\text{ن}}{\text{نَ}} = \frac{\overline{\text{أب}}^{2}}{\overline{\text{أَبَ}}^{2}}$ وكذا يؤخذ مما تقدم أن $\frac{\text{س و}}{\text{سَ وَ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}}$ واذن يكون $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\overline{\text{أب}}^{3}}{\overline{\text{أَبَ}}^{3}}$

* وهو المراد

دعوى نظرية

* (٣٣١) النسبة بين كثيري السطوح المتشابهين كالنسبة بين مكعبي حرفين متناظرين منهما
* من المعلوم أن كثيري السطوح المتشابهين يتركبان من عدد واحد من الاهرامات الثلاثية
* المتشابهة صورة ووضعا فاذا دلت الرموز ه و هَ و هً و هٌ و ... الخ على
* اهرامات كثير السطوح الاول , د و دَ و دً و دٌ و ... الخ على اهرامات
* كثير السطوح الثاني و أ و أَ و أً و ... الخ على أحرف الاهرامات
* الاولى و ب و بَ و بً و بٌ و ... الخ على الاحرف المناظرة لها من الثانية حدث

* $\frac{\text{ه}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}^{3}}{\text{ب}^{3}}$, $\frac{\text{هَ}}{\text{دَ}} = \frac{\text{أَ}^{3}}{\text{بَ}^{3}}$, $\frac{\text{هً}}{\text{دً}} = \frac{\text{أً}^{3}}{\text{بً}^{3}}$, $\frac{\text{هٌ}}{\text{دٌ}} = \frac{\text{أٌ}^{3}}{\text{بٌ}^{3}}$ و ... الخ

* وحيث ان الاحرف المناظرة من كثيري السطوح متناسبة يحدث

* $\frac{\text{ه}}{\text{د}} = \frac{\text{هَ}}{\text{دَ}} = \frac{\text{هً}}{\text{دً}} = \frac{\text{هٌ}}{\text{دٌ}} = \ldots$ أو

* $\frac{\text{ه} + \text{هَ} + \text{هً} + \text{هٌ} + \ldots \text{الخ}}{\text{د} + \text{دَ} + \text{دً} + \text{دٌ} + \ldots \text{الخ}} = \frac{\text{ه}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}^{3}}{\text{ب}^{3}}$ أو $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{أ}^{3}}{\text{ب}^{3}}$ وهو المراد

الفصل التاسع

(تمرينات)

١ ـ المطلوب تعيين قطر متوازي المستطيلات اذا كانت مقادير أحرفه الثلاثة المتجاورة هي
أ = ٤٫٢٠ متر و ب = ٠٫٨٠ متر و ح = ٠٫٦٠ متر

٢ ـ المطلوب البرهنة على أن قطر المكعب يساوي حاصل ضرب أحد أحرفه في $\sqrt{٣}$

٣ ـ ما مقدار زنة الهواء الموجود في أودة طولها ٥ متر وعرضها ٤ متر وارتفاعها ٣٫٢٠ متر
اذا كان الليتر الواحد من الهواء يزن ١٫٢٩ غراما

٤ ـ اذا دل عدد ١٦٫٦٠٤ مترا مكعبا على مساحة متوازى مستطيلات والمطلوب معرفة أبعاده الثلاثة اذا علم أنها مناسبة للمقادير $\frac{١}{٨}$ و $\frac{٥}{٤}$ و $\frac{٥}{٦}$

٥ ـ اذا كان مقدار قطر أحد أوجه المكعب مساويا ٤ متر والمطلوب حساب مساحته الجمية

٦ ـ اذا ملئ اناء على شكل مكعب من الكؤل وكانت زنتهما معا تعادل ٥٢٫٦٨٨ كيلوغراما وزنة الاناء وحده تعادل كيلوغرامين والمطلوب معرفة عمق هذا الاناء اذا كانت كثافة الكؤل هى ٠٫٧٩٢

٧ ـ ما مساحة حجم المنشور الثلاثى الذى ارتفاعه ٥ متر وقاعدته مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ٥ متر

٨ ـ اذا كانت قاعدة منشور ثلاثى مثلثا متساوى الاضلاع ضلعه ح وكان ارتفاعه ضعف ارتفاع المثلث المذكور المعتبر قاعدة والمطلوب ايجاد قانون مساحته الجمية

٩ ـ المطلوب تعيين مساحة حجم المنشور الذى ارتفاعه ٣ متر وقاعدته مربع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها متران

١٠ ـ اذا كان ارتفاع هرم يساوى ١٥ مترا ومساحة قاعدته تساوى ١٦٩ مترا مربعا فعلى أى بعد من رأسه يجب قطع هذا الهرم بمستو موازٍ لقاعدته بحيث تكون مساحة القطع تساوى ١٠٠ متر مربع

١١ ـ اذا ساوت مساحة قاعدة هرم ١٤٤ مترا مربعا وقطع بمستو موازٍ لقاعدته على بعد أربعة أمتار من رأسه وكانت مساحة القطع الحادث تساوى ٦٤ مترا مربعا فما مقدار طول ارتفاع الهرم

١٢ ـ اذا دل عدد ١٢ مترا على ارتفاع هرم قاعدته مربع ضلعه ٨ أمتار فما مقدار مساحة القطع الحادث له من مستو موازٍ لقاعدته على بعد أربعة أمتار من رأسه

١٣ ـ اذا دل عدد ١٤ مترا على الارتفاع المشترك لهرمين قاعدة الاول مربع طول ضلعه ٩ متر وقاعدة الثانى مسدس طول ضلعه ٧ متر فما مقدار مساحتى القطعين الحادثين لهذين الهرمين اذا قطع كل منهما بمستو موازٍ لقاعدته على بعد ستة أمتار من رأسه

١٤ ـ اذا دل عدد ٨ متر على طول أحد أحرف هرم وأخذ عليه بالابتداء من الرأس بعد يساوى خمسة أمتار ومد من نهاية هذا البعد مستو موازٍ لقاعدة الهرم والمطلوب معرفة النسبة الكائنة بين السطحين الجانبيين للهرمين الاصغر والكامل

١٥ ـ المطلوب تقويم هرم ثلاثى منتظم من الفضة طول حرفه يساوى ٠٫٠٦ متر (كثافة الفضة هى ١٠٫٤٧ وقيمة الكيلوغرام الواحد منها يعادل ٢٢٠٫٥٥ فرنكا)

١٦ ـ المطلوب ايجاد المساحة الجمية لهرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٦ متر وطول أحد أحرفه ٥ متر

١٧ ـ اذا كانت قاعدة هرم شكلا مسدسا منتظما طول أحد أضلاعه ٣ متر والمطلوب أولا معرفة الارتفاع اللازم اعطاؤه لهذا الهرم حتى تكون مساحته السطحية عشرة أمثال مساحة القاعدة وثانيا معرفة المساحة الجمية له

١٨ ـ اذا كان قاعدتا هرم ناقص شكلين مسدسين منتظمين ضلع أحدهما متر واحد وضلع الثانى متران والمطلوب حساب ارتفاع الهرم اذا كانت مساحته الجمية تساوى ١٢ مترا مكعبا

* ١٩ ـ ما مقدار طول حرف المكعب الذى تكون مساحته الجمية ضعف مساحة مكعب
* معلوم طول حرفه ٥ متر

* ٢٠ ـ اذا فرض هرم ناقص قاعدتاه شكلان مثمنان منتظمان وطول أحد أضلاع القاعدة
* العليا ٠٫٤ متر وطول أحد أضلاع القاعدة السفلى ٠٫٣ متر وارتفاع الهرم
* الناقص ٠٫٥ متر والمطلوب معرفة حجم الهرم الكامل

* ٢١ ـ المطلوب معرفة حجم الهرم الناقص الذى ارتفاعه ٠٫٩ متر وقاعدتاه شكلان مثمنان
* منتظمان ضلع احداهما ٠٫٨ متر وضلع الثانية ٠٫٥ متر

(تم الجزء الثالث من كتاب التحفة البهية ويليه الجزء الرابع ان شاء الله تعالى)

(تمت)