



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
الإدارة العامة لشئون الكتب

الرياضيات

الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

تأليف

أ. عمر فؤاد جاب الله

د. عصام وصفى روفائيل

أ. سيرافيم الياس اسكندر

أ. عفاف أبو الفتوح صالح

أ. محمود ياسر الخطيب

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم

طبعة : ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

.....: الاسم:

.....: الفصل:

.....: المدرسة:

.....: العنوان:

مراجعة
الإدارة العامة لتخطيط وصياغة المناهج

إشراف
د/ أكرم حسن محمد
رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

المواصفات الفنية:

عدد الصفحات بالغلاف	ورق الغلاف	ورق المتن	طبع الغلاف	طبع المتن	مقاس الكتاب	رقم الكتاب
١٨٠ صفحة	١٨٠ جم كوشبية	٧٠ جم أبيض	٤ لون	٤ لون	$\frac{1}{8}$ (٨٢ × ٥٧) سم	٢٠/٢/٣٣/٢/١٥/٢٢٨

<http://elearning.moe.gov.eg>

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

أبناءنا الأعزاء :

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثانى الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستك للرياضيات عملاً ممتعاً ومفيداً له تطبيقاته فى حياتكم العملية، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدرها، دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية، وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم وما سبق أن تم دراسته فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبيكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسباً داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة و التدرجات :

يوجد تمارين على كل درس، و تمارين عامة على الوحدة، ونشاط خارجى، واختبار فى نهاية كل وحدة، وفى نهاية الفصل الدراسى اختبارات عامة تساعدك على مراجعة المقرر كاملاً، حيث تم رفعها على موقع الوزارة الإلكتروني.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لك ولصبرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

٢	مراجعة
٤	الدرس الأول: الجذر التكعيبي للعدد النسبي
٧	الدرس الثاني: مجموعة الأعداد غير النسبية ن
٩	الدرس الثالث: إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي
١٣	الدرس الرابع: مجموعة الأعداد الحقيقية ح
١٥	الدرس الخامس: علاقة الترتيب في ح
١٧	الدرس السادس: الفترات
٢٣	الدرس السابع: العمليات على الأعداد الحقيقية
٢٨	الدرس الثامن: العمليات على الجذور التربيعية
٣٣	الدرس التاسع: العمليات على الجذور التكعيبية
٣٥	الدرس العاشر: تطبيقات على الأعداد الحقيقية
٤٠	الدرس الحادي عشر: حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

الوحدة الثانية: العلاقة بين متغيرين

٤٤	الدرس الأول: العلاقة بين متغيرين
٤٨	الدرس الثاني: ميل الخط المستقيم وتطبيقات حياتية

الوحدة الثالثة: الإحصاء

٥٤	الدرس الأول: جمع البيانات وتنظيمها
٥٧	الدرس الثاني: الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول التكراري المتجمع النازل وتمثيلهما بيانياً
٦١	الدرس الثالث: الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال

الوحدة الرابعة: متوسطات المثلث و المثلث المتساوي الساقين

- ٦٨.....الدرس الاول: متوسطات المثلث
- ٧٢.....الدرس الثاني: المثلث المتساوي الساقين
- ٧٤.....الدرس الثالث: نظريات المثلث المتساوي الساقين
- ٨٣.....الدرس الرابع: نتائج علي نظريات المثلث المتساوي الساقين

الوحدة الخامسة: التباين

- ٨٩.....الدرس الأول: التباين
- ٩٣.....الدرس الثاني: المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث
- ٩٧.....الدرس الثالث: المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث
- ١٠٢.....الدرس الرابع: متباينة المثلث

الرموز الرياضية المستخدمة

عمودى على	\perp	مجموعة الأعداد الطبيعية	\mathbb{N}
يوازي	\parallel	مجموعة الأعداد الصحيحة	\mathbb{Z}
القطعة المستقيمة ab	\overline{ab}	مجموعة الأعداد النسبية	\mathbb{Q}
الشعاع ab	\overrightarrow{ab}	مجموعة الأعداد غير النسبية	\mathbb{R}
المستقيم ab	$\longleftrightarrow ab$	مجموعة الأعداد الحقيقية	\mathbb{C}
قياس زاوية l	$\angle (l)$	الجذر التربيعي للعدد a	\sqrt{a}
تشابه	\sim	الجذر التكعيبي للعدد a	$\sqrt[3]{a}$
أكبر من	$<$	فترة مغلقة	$[a, b]$
أكبر من أو يساوي	\leq	فترة مفتوحة	$]a, b[$
أقل من	$>$	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	$[a, b[$
أقل من أو يساوي	\geq	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	$]a, b]$
احتمال وقوع الحدث A	$P(A)$	فترة غير محدودة	$]a, \infty[$
		تطابق	\equiv

الأعداد الحقيقية



مراجعة

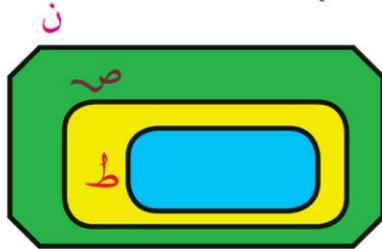
فكر وناقش

مجموعات الأعداد

- مجموعة أعداد العد : $\{ \dots, 3, 2, 1 \} = \mathbb{E}$
- مجموعة الأعداد الطبيعية : $\{ 0 \} \cup \mathbb{E} = \{ \dots, 3, 2, 1, 0 \} = \mathbb{T}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة : $\{ \dots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots \} = \mathbb{V}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة \mathbb{V}_+ : $\mathbb{E} = \{ \dots, 3, 2, 1 \}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة \mathbb{V}_- : $\{ \dots, 3, 2, 1, -1, -2, -3, \dots \}$

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{V}_-$$

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{N} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{V}, b \neq 0 \right\}$



$$\mathbb{T} \supset \mathbb{V} \supset \mathbb{N}$$

القيمة المطلقة للعدد النسبي:

$$\frac{0}{3} = \left| \frac{0}{3} \right|, \quad 0 = |0|, \quad 3 = |3|, \quad 7 = |7-|$$

إذا كان $|a| = 0$ فإن $a = \pm 0$

الصورة القياسية للعدد النسبي هي:

$$|a| \times 10^n \text{ حيث } n \in \mathbb{V}, \quad 1 \leq |a| < 10$$



مثلاً العدد $٤١٠ \times ٢٥,٣٢$ في صورته القياسية = $٤١٠ \times ٢,٥٣٢$
 في صورته القياسية = $٠,٠٠٠٥٣$ في صورته القياسية = $٤-١٠ \times ٥,٣$

العدد النسبي المربع الكامل

هو العدد الموجب الذي يمكن كتابته على صورة مربع عدد نسبي أي (عدد نسبي)^٢

مثل ١، ٤، ٢٥، $\frac{٩}{١٦}$ ، $٢\frac{١}{٤}$ ، ...

العدد النسبي المكعب الكامل

هو العدد النسبي الذي يمكن كتابته على صورة مكعب عدد نسبي أي (عدد نسبي)^٣

مثل ١، ٨، ٢٧، ٢١٦، $\frac{٨}{١٢٥}$ ، ...

الجزر التربيعي للعدد النسبي المربع الكامل

○ الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجب أ هو العدد الذي مربعه يساوي أ

○ $\sqrt{\text{صفر}} = \text{صفر}$

○ كل عدد نسبي مربع كامل أ له جذران تربيعيان كل منهما معكوس جمعي للآخر وهما

$\sqrt{٧}$ ، $-\sqrt{٧}$

مثلاً العدد $\frac{١٦}{٢٥}$ له جذران تربيعيان هما $\frac{٤}{٥}$ ، $-\frac{٤}{٥}$

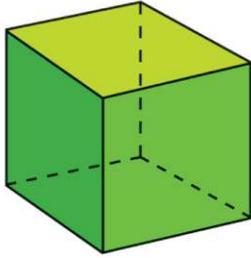
○ $\sqrt[٣]{٩}$ يعني الجذر التربيعي الموجب للعدد ٩ وهو ٣

○ $\sqrt[٣]{\frac{١}{ب}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{ب}}$ أي أن $\sqrt[٣]{٧} = \frac{١}{\sqrt[٣]{\frac{١}{٧}}}$



الجذر التكعيبي للعدد النسبي

فكر وناقش



سبق أن تعلمت أن:

حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه

أكمل

المكعب الذي طول حرفه ٧ سم يكون حجمه × × =
..... سم^٣ =

هيا نفكر

٥	١٢٥
٥	٢٥
٥	٥
	١

إذا كان لدينا مكعب حجمه ١٢٥ سم^٣، فما طول حرفه؟
نبحث عن ثلاثة أعداد متساوية حاصل ضربها = ١٢٥
يمكن تحليل العدد ١٢٥ إلى عوامله الأولية .

$$٥ \times ٥ \times ٥ = ١٢٥$$

∴ المكعب الذي حجمه ١٢٥ سم^٣، يكون طول حرفه ٥ سم.

تسمى ٥ الجذر التكعيبي للعدد ١٢٥، وتكتب $\sqrt[3]{١٢٥} = ٥$

سوف تتعلم

كيفية إيجاد الجذر التكعيبي
لعدد نسبي باستخدام
التحليل.

كيفية إيجاد الجذر التكعيبي
لعدد نسبي باستخدام الآلة
الحاسبة.

حل معادلات تشمل إيجاد
الجذر التكعيبي.

حل تطبيقات على الجذر
التكعيبي لعدد نسبي.

المصطلحات الأساسية

جذر تكعيبي.

الجذر التكعيبي للعدد النسبي أ هو العدد الذي مكعبه يساوي أ

يرمز للجذر التكعيبي للعدد النسبي أ بالرمز $\sqrt[3]{\text{أ}}$

الجذر التكعيبي لعدد نسبي موجب يكون موجبًا، مثلًا $\sqrt[3]{١٢٥} = ٥$

الجذر التكعيبي لعدد نسبي سالب يكون سالبًا، مثلًا $\sqrt[3]{-٨} = -٢$ لماذا؟

$\sqrt[3]{\text{صفر}} = \text{صفر}$

$\sqrt[3]{١} = ١$



إيجاد الجذر التكعيبي للعدد النسبي المكعب الكامل:



○ يمكن تحليل العدد إلى عوامله الأولية.

○ يمكن استخدام الآلة الحاسبة.

لاحظ أن العدد النسبي المكعب الكامل له جذر تكعيبي واحد وهو عدد نسبي أيضًا، لماذا؟

أمثلة



١ استخدم التحليل لإيجاد قيمة كل من $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ ، $\sqrt[3]{216}$ ، $\sqrt[3]{1000}$ وتحقق من صحة إجاباتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

٢	٨	٣	٢٧	$\frac{27}{8} = 3 \frac{3}{8}$
٢	٤	٣	٩	
٢	٢	٣	٣	
	١		١	

$$\frac{3}{2} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{3 \frac{3}{8}}$$

٢	٢	٢١٦
٢	٢	١٠٨
٢	٢	٥٤
٣	٣	٢٧
٣	٣	٩
	٣	٣
		١

$$6 = 3 \times 2 = \sqrt[3]{216}$$

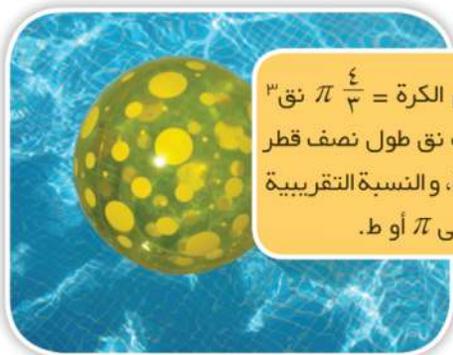
٢	٢	١٠٠٠
٢	٢	٥٠٠
٢	٢	٢٥٠
٥	٥	١٢٥
٥	٥	٢٥
	٥	٥
		١

$$10 = 5 \times 2 = \sqrt[3]{1000}$$

استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من صحة إجابتك باستخدام

٢ أوجد طول نصف قطر الكرة التي حجمها ٤٨٥١ سم^٣ ($\frac{22}{7} = \pi$)

الحل



حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi$ نق^٣
حيث نق طول نصف قطر
الكرة، والنسبة التقريبية
تسمى π أو ط.

٣	٩٢٦١
٣	٣٠٨٧
٣	١٠٢٩
٧	٣٤٣
٧	٤٩
٧	٧
	١

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi$ نق^٣

$$\frac{22}{7} \times \frac{4}{3} = 4851$$

$$\frac{9261}{8} = \frac{7 \times 3 \times 4851}{22 \times 4} = \text{نق}^3$$

$$\frac{7 \times 23}{22} = \text{نق}^3$$

$$\text{نق} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 23}{22}} = 10,5 \text{ سم}$$





تدرب

أوجد طولَ قطرِ الكرة التي حجمها $113,04$ سم³ ($\pi \approx 3,14$)



مثال

حل كلاً من المعادلات الآتية في ن:

أ $8 = \sqrt[3]{s}$

ب $8 = 9 + \sqrt[3]{s}$

ج $125 = \sqrt[3]{(2-s)}$

د $54 = 10 - \sqrt[3]{(1-s)}$

الحل

أ $8 = \sqrt[3]{s}$

ب $8 = 9 + \sqrt[3]{s}$

$2 = \sqrt[3]{8-s}$

$9 - 8 = \sqrt[3]{s}$

∴ مجموعة الحل = {2}

$1 = \sqrt[3]{s}$

∴ مجموعة الحل = {1}

د $54 = 10 - \sqrt[3]{(1-s)}$

$64 = \sqrt[3]{(1-s)}$

$\sqrt[3]{64} = 1 - s$

$4 = 1 - s$

$5 = s$

∴ مجموعة الحل = $\{5\}$

ج $125 = \sqrt[3]{(2-s)}$

$5 = \sqrt[3]{2-s}$

$5 = 2 - s$

$7 = s$

∴ مجموعة الحل = {7}



تدرب

حلّ المعادلات الآتية في ن: $27 = \sqrt[3]{(1+s)}$ ، $27 = \sqrt[3]{(1+s)}$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



فكر وناقش

سوف تتعلم

مجموعة الأعداد غير النسبية.

المصطلحات الأساسية

عدد غير نسبي.

سبق أن علمت أن: العدد النسبي هو العدد الذي يمكن وضعه على الصورة

$$\frac{a}{b} : \text{حيث } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

فمثلاً: عند حل المعادلة $2x = 20$

$$\text{فيكون } x = \frac{20}{2}$$

$$x = 10$$

ونلاحظ أن كلاً من $\frac{10}{1}$ ، $-\frac{10}{1}$ عدد نسبي.

ولكن توجد كثير من الأعداد التي لا يمكن وضعها على الصورة $\frac{a}{b}$

$$\text{حيث } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

فمثلاً: عند حل المعادلة $x^2 = 2$ فإننا لا نستطيع إيجاد عدد نسبي مربعه

يساوي 2

هو العدد الذي لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث

$$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

العدد غير النسبي

ومن أمثلة الأعداد غير النسبية:

أولاً: الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التي ليست مربعات كاملة

$$\text{مثل: } \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$$

ثانياً: الجذور التكعيبية للأعداد التي ليست مكعبات كاملة

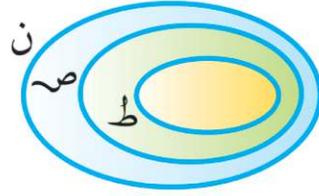
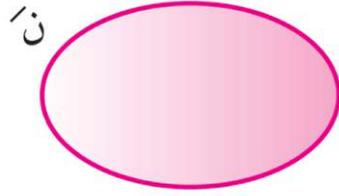
$$\text{مثل: } \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \dots$$

ثالثاً: النسبة التقريبية π

حيث إنه لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لأي من هذه الأعداد. لماذا؟



ومثل هذه الأعداد وغيرها تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز \mathbb{N} .



$$\mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

فكّر هل $\sqrt{3}-1$ عدد غير نسبي؟ لماذا؟

مثال

أكمل باستخدام أحد الرمزين \mathbb{N} أو \mathbb{N} .

أ $\sqrt{8}-\sqrt{2} \in \dots$

ب $\sqrt{6} \in \dots$

ج $\pi \in \dots$

د $\sqrt{\frac{1}{4}} \in \dots$

هـ صفر $\in \dots$

و $\sqrt{4}-\sqrt{4} \in \dots$

ز $|\frac{3}{5}| \in \dots$

ح $4,7 \times 10^5 \in \dots$

ط $\sqrt{9}-\sqrt{9} \in \dots$

ناقش معلمك في حل المثال السابق



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي

فكر وناقش

سوف تتعلم

- إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي.
- تمثيل العدد غير النسبي على خط الأعداد.
- حل معادلات في \mathbb{N} .

هل تستطيع إيجاد عددين نسبيين ينحصر بينهما العدد غير النسبي $\sqrt{2}$ ؟

نلاحظ أن $\sqrt{2}$ ينحصر بين $\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ أي أن $1 < \sqrt{2} < 2$
أي أن $\sqrt{2} = 1 +$ كسر عشري.

ولإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{2}$ نفحص قيم الأعداد التالية .

$$1,69 = \sqrt{1,3}, 1,44 = \sqrt{1,2}, 1,21 = \sqrt{1,1}$$

$$2,25 = \sqrt{1,5}, 1,96 = \sqrt{1,4}$$

$$2,25 > 2 > 1,96 \therefore$$

$$1,5 > \sqrt{2} > 1,4 \therefore$$

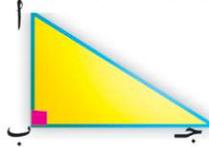
أي أن $\sqrt{2} = 1,4 +$ كسر عشري

$$1,42 > \sqrt{2} > 1,41$$

استخدم الآلة الحاسبة لتأكيد صحة إجابتك.

تمهيد: (في الشكل المقابل) المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب فيكون:

$$^2(أج) = ^2(أب) + ^2(بج)$$



وتسمى بنظريه فيثاغورس وستدرس بالتفصيل بمنهج الهندسة

تمثيل العدد غير النسبي على خط الأعداد

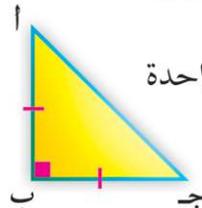
كيف نحدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{2}$ على خط الأعداد .

إذا رسمنا المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب،

والمساوي الساقين بحيث أ ب = ب ج = وحدة طول واحدة

$$^2(أج) = ^2(أب) + ^2(بج) = 2 + 2 = 4 \therefore أج = \sqrt{4} = 2$$

$\therefore أج = \sqrt{2}$ وحدة طول.



- ب عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[3]{12}$
 ج عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[3]{10}$
 د عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[3]{20}$

٢ اثبت أن 

- أ $\sqrt[3]{3}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨ ، ب $\sqrt[3]{15}$ ينحصر بين ٢,٥ ، ٢,٤ ، ٢,٥
 ٣ أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt[3]{11}$
 ٤ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[3]{2}$
 ٥ ارسم خطَّ الأعدادِ وحدِّد عليه النقطة التي تمثل العدد غير النسبي $\sqrt[3]{3}$
 ٦ ارسم خطَّ الأعدادِ وحدِّد عليه النقطة التي تمثل العدد غير النسبي $\sqrt[3]{2} + 1$

مثال (١)



أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ن:

- أ س $2 = 2^3$ ب س $5 = 2^3$ ج س $1 = \frac{4}{3}^2$ د س $8 = 3^3$

الحل

أ س $2 = 2^3$
 $\therefore \sqrt[3]{2} = 2$
 ب س $5 = 2^3$
 $\therefore \sqrt[3]{5} = 2$
 ج س $1 = \frac{4}{3}^2$
 $1 \times \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}$
 $\frac{3}{4} = 2$
 $\therefore \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 2$
 د س $8 = 3^3$
 $8000 = \frac{8}{0.001} = 3^3$
 $\therefore \sqrt[3]{8000} = 3$
 $200 \ni \text{ن}$
 مجموعة الحل للمعادلة في ن = \emptyset

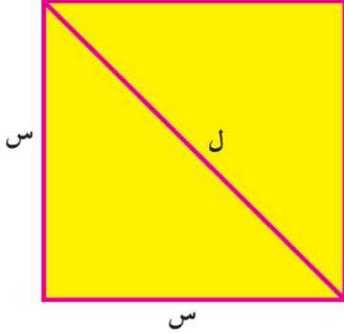


مثال (٢)



أوجد كلاً من طولِ ضلع وطول قطر مربع مساحته ٧ سم^٢.

الحل



إذا كان طولُ الضلع س سم فإن المساحة = س × س = س^٢

$$٧ = س^٢$$

$$\therefore س = \sqrt{٧} \text{ سم} \quad \therefore س = \sqrt{٧} \text{ سم} \text{ لماذا؟}$$

لإيجاد طول قطر المربع: استخدم نظرية فيثاغورس

$$ل^٢ = س^٢ + س^٢ \quad \text{حيث ل طول قطر المربع}$$

$$\therefore ل^٢ = ١٤$$

$$\therefore ل = \sqrt{١٤} \text{ سم} \quad \therefore ل = \sqrt{١٤} \text{ سم} \text{ لماذا؟}$$

مثال (٣)



دائرة مساحة سطحها ٣π سم^٢ أوجد محيطها.

الحل

$$\text{مساحة سطح الدائرة} = \pi \text{ نق}^٢$$

$$٣\pi = \pi \text{ نق}^٢$$

$$\therefore \text{نق}^٢ = ٣$$

$$\text{نق} = \sqrt{٣} \text{ سم} \quad \text{أو نق} = -\sqrt{٣} \text{ سم (مرفوض)}$$

$$\text{محيط الدائرة} = ٢\pi \text{ نق} = \sqrt{٣} \times ٢\pi = ٢\sqrt{٣}\pi \text{ سم}$$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



فكر وناقش

سوف تتعلم

- مجموعة الأعداد الحقيقية ح.
- العلاقة بين مجموعات الأعداد ط، ص، ن، ن، ح.

المصطلحات الأساسية

- عدد حقيقي.

سبق أن درسنا مجموعة الأعداد النسبية ن، ووجدنا أن هناك أعدادًا أخرى مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، π ... وهذه الأعداد تكون مجموعة الأعداد غير النسبية ن اتحاد المجموعتين ن، ن يعطى مجموعةً جديدةً تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية، ويرمز لها بالرمز ح.

$$ح = ن \cup ن$$

ح



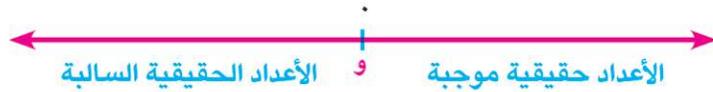
تأمل شكل فن المقابل تجد أن:

- $ن \cap ن = \emptyset$
- أى عدد طبيعي أو صحيح أو نسبي أو غير نسبي هو عدد حقيقي.

ط ص ن ح وكذلك ن ح ح

فكر أعط أمثلة من عندك لأعداد حقيقية بعضها نسبي وبعضها غير نسبي.

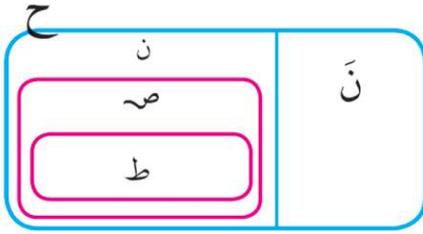
- كل عدد حقيقي تمثله نقطة واحدة على خط الأعداد.



أولاً: العدد صفر تمثله نقطة الأصل و.

ثانياً: الأعداد الحقيقية الموجبة تمثلها جميع نقاط خط الأعداد على اليمين و
ثالثاً: الأعداد الحقيقية السالبة تمثلها جميع نقاط خط الأعداد على يسار و





١ **ضع** كلاً من الأعداد الآتية في مكانها المناسب على شكل فن المقابل.

٥ ، ٠ ، $\sqrt{١٦}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٧}{٩}$ ، ٠ ، ٦ ، $\sqrt{٥}$ ، ٩ ، ٤ ، $\frac{١}{٣}$

٢ **حدّد** على خطّ الأعداد النقطة أ التي تمثّل العدد $\sqrt{٨}$ ، والنقطة ب التي تمثل العدد $\sqrt{٩}$ وأوجد طول أ ب .



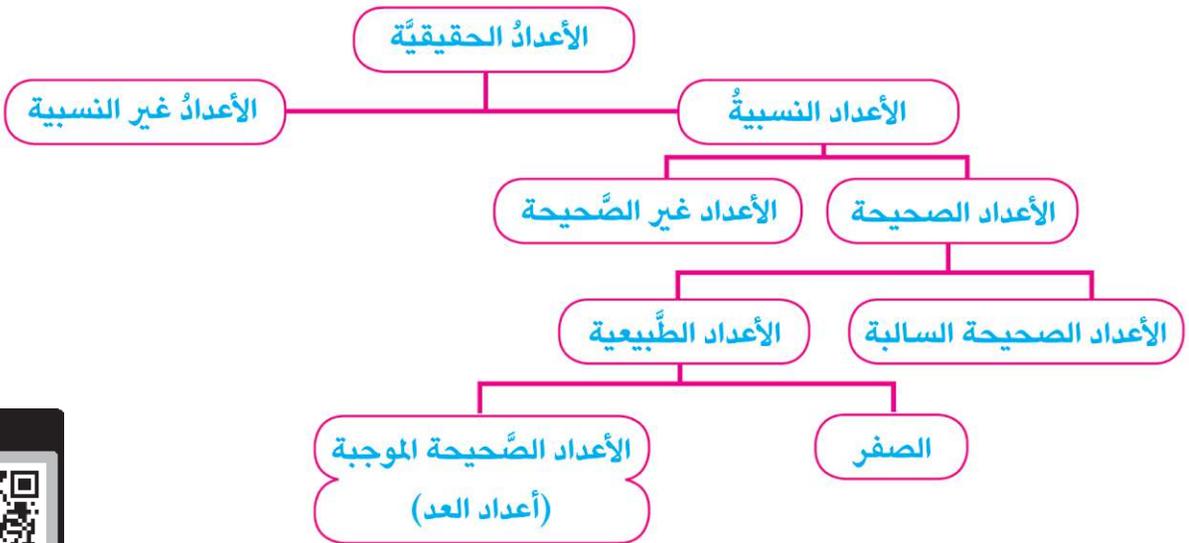
٣ **وضّح** صحة أو خطأ كل من العبارتين:

أ كل عدد طبيعي هو عدد حقيقي موجب.

ب كل عدد صحيح هو عدد حقيقي.

لاحظ أن: $\sqrt{١} = ١$ لأن $١ = ١ \times ١ \times ١$

بينما $\sqrt{١} \neq -١$ لأنه لا يوجد عدد حقيقي إذا ضرب في نفسه يعطي -١.



ناقش مع معلمك / معلمتك و زملائك: هل توجد أعداد غير حقيقية ؟

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



فكر وناقش

سوف تتعلم

علاقة الترتيب في ح.

المصطلحات الأساسية

- علاقة ترتيب .
- أكبر من .
- اصغر من .
- تساوى .
- ترتيب تصاعدي .
- ترتيب تنازلي .

إذا كانت أ، ب نقطتين تنتميان للمستقيم ل، وحددنا اتجاهًا معينًا كالمبين بالسهم فإنه يمكن القول إن:

- النقطة ب تلي النقطة أ، أي تكون على يمينها.
- النقطة أ تسبق النقطة ب، أي تكون على يسارها.

وهكذا بالنسبة لجميع نقاط الخط المستقيم، فإذا علمنا أن كل نقطة من نقط الخط المستقيم تمثل عددًا حقيقيًا فإننا نقول إن:

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة

خواص الترتيب:

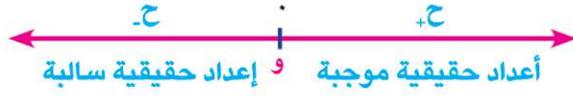
١ إذا كان س، ص عددين حقيقيين يمثلهما على خط الأعداد النقطتان أ، ب على الترتيب فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:

أ تلي ب ∴ س < ص	أ تسبق ب ∴ س > ص	أ تنطبق على ب ∴ س = ص

٢ إذا كانت س عددًا حقيقيًا تمثله النقطة أ على خط الأعداد، وكانت و هي نقطة الأصل التي تمثل العدد صفر فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:

أ على يسار و ∴ س > و	أ على يمين و ∴ س < و	أ تنطبق على و ∴ س = و
ويقال إن س عدد حقيقي سالب .	ويقال إن س عدد حقيقي موجب .	





مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة: $ح_+ = \{س : س \geq 0\}$

مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة: $ح_- = \{س : س < 0\}$

$$ح = ح_+ \cup \{0\} \cup ح_-$$

لاحظ أن: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $ح_+ \cup \{0\} = \{س : س \geq 0\}$
مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $ح_- \cup \{0\} = \{س : س \leq 0\}$

مثال (١)



رتب الأعداد الآتية تصاعدياً $\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{16}$ ، $\sqrt{25}$ ، $\sqrt{36}$

الحل

$$\sqrt{1} = 1، \sqrt{4} = 2، \sqrt{9} = 3، \sqrt{16} = 4، \sqrt{25} = 5، \sqrt{36} = 6$$

الترتيب التصاعدي من الأصغر إلى الأكبر $\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{16}$ ، $\sqrt{25}$ ، $\sqrt{36}$
أي $\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{16}$ ، $\sqrt{25}$ ، $\sqrt{36}$

مثال (٢) من الشكل المقابل:



أوجد مجموعة الأعداد التي تنتمي إليها س حيث س عدد صحيح

الحل

من الشكل نلاحظ أن: $س^3 < س < س^2$

فعند اختيار س عدد صحيح سالب يحقق المتباينة السابقة

$$مثل: س = -3 \Rightarrow -27 < -3 < 9$$

∴ مجموعة الأعداد التي تنتمي إليها س هي $ص_- = \{-1، -2، -3، \dots\}$

اختر س عدد صحيح موجب. هل تحقق المتباينة؟ ناقش معلمك

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



فكر وناقش

الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أولاً: الفترات المحدودة

إذا كان $a < b$ ، فإننا نعرف كلاً من:

الفترة المغلقة $[a, b]$

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$$



$[a, b]$ \supset ح وعناصرها a ، b وجميع الأعداد الحقيقية بينهما
توضع دائرة مظللة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين a ، b وتظلل
المنطقة بينهما على خط الأعداد.

الفترة المفتوحة (a, b)

$$(a, b) = \{x : a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$$



(a, b) \supset ح وعناصرها هي جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين
العددين a ، b .
توضع دائرة مفتوحة (غير مظللة) عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين
 a ، b وتظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد

سوف نتعلم

- الفترات المحدودة.
- الفترات غير المحدودة.
- العمليات على الفترات.

المصطلحات الأساسية

- فترة محدودة.
- فترة مغلقة.
- فترة مفتوحة.
- فترة نصف مفتوحة.
- فترة غير محدودة.
- اتحاد.
- تقاطع.
- فرق.
- مكملة.



اكتب كلاً من $[3, 5]$ ، $(3, 5]$ بطريقة الصفة المميزة ثم مثل كلاً منهما
على خط الأعداد.



الفترات نصف المفتوحة أو (نصف المغلقة)

$[a, b[$



$[a, b[= \{s : a > s \geq b, s \in \mathbb{C}\}$
 $[a, b[\supset \mathbb{C}$ عناصرها العدد b وجميع الأعداد المحصورة بين a, b .

$]a, b]$



$]a, b] = \{s : a \geq s > b, s \in \mathbb{C}\}$
 $]a, b] \supset \mathbb{C}$ عناصرها العدد a وجميع الأعداد المحصورة بين a, b .



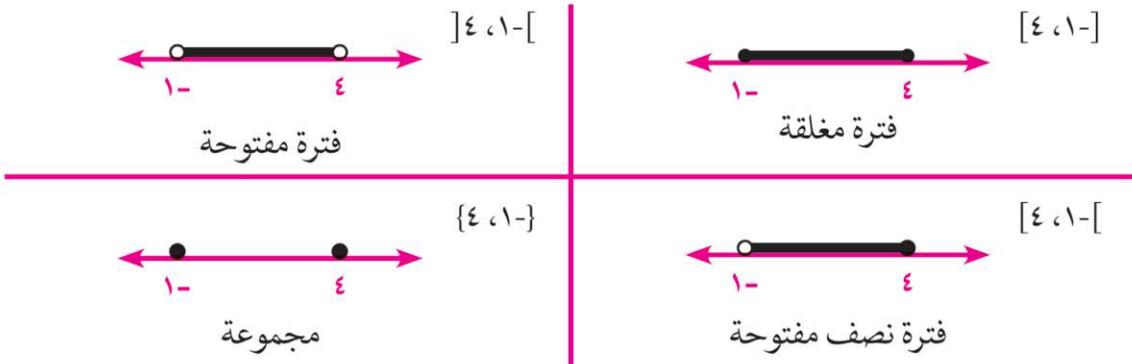
اكتب كلاً من الفترتين $[3, 5]$ ، $[3, 5[$ بطريقة الصفة المميزة، و مثل كلاً منهما على خط الأعداد.

مثال (1)



مثل بيانياً على خط الأعداد كلاً من: $[1, 4]$ ، $[1, 4[$ ، $]1, 4]$ ، $]1, 4[$

الحل



ناقش مع معلمك / معلمتك و زملائك: هل الفترة مجموعة منتهية أم غير منتهية؟



مثال (٢) 

١  **اكتب** على صورة فترة، كلاً من المجموعات الآتية، ومثل كلاً منها على خط الأعداد:

أ \sim = {س : ٢ > س > ٥ ، س ∈ ح} ب \sim = {س : ٢ ≥ س > ٣ ، س ∈ ح}

ج \sim = {س : ٠ ≥ س ≥ ٤ ، س ∈ ح} د \sim = {س : ٣ > س ≥ ١- ، س ∈ ح}

الحل



٢  **ضع** الرمز المناسب ∈ أو ∉ لتكون العبارة صحيحة:

أ ٣ ∈ [٣، ١- ب ٢- ∈ [٣، ١- ج $\frac{1}{٢}$ ∈ [١، ٠[

د $\sqrt[٢]{٢}$ ∈ [٢، ١] هـ ٤ ∈ [٥، ٠] و $\sqrt[٨]{٨}$ ∈ [٢، ١-]

ز |٥-| ∈ [٦، ٤] ح ٣، ٢ × ١٠° ∈ [١٠، ٠[

الحل

أ ∉ ب ∈ ج ∈ د ∉
هـ ∉ و ∉ ز ∉ ح ∉

٣  **اكتب** الفترة التي يعبر عنها كلٌّ من الأشكال الآتية:



الحل

أ [٣، ٠] ب [١، ٤-]
ج [١-، ٣-] د [٦، ٠]



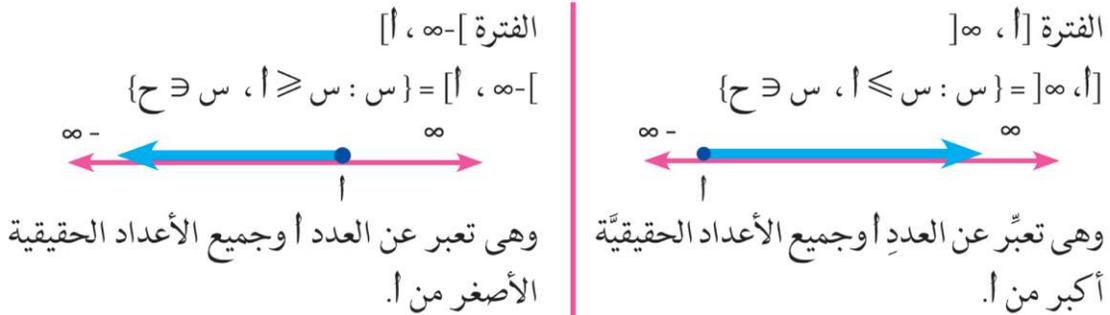
ثانيًا: الفترات غير المحدودة

تعلم أن: خط الأعداد الحقيقيّة مهما امتد من جهتيه فإنه يوجد أعداد حقيقية موجبة من جهة اليمين وسالبة من جهة اليسار تقع على هذا الخط.

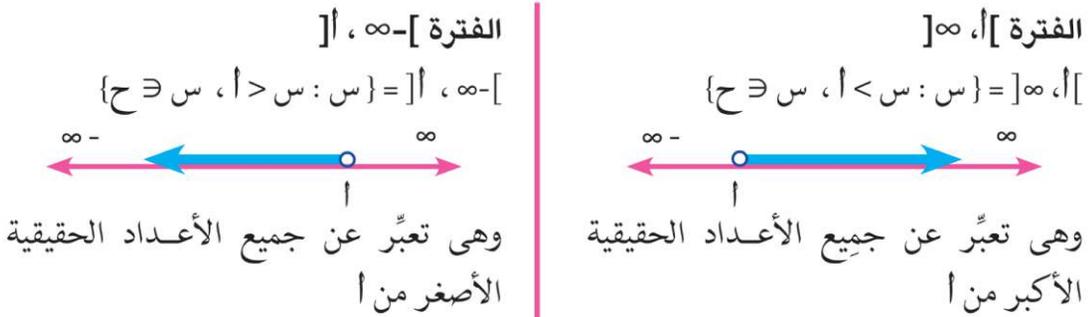
- الرمز (∞) ويقرأ (لانهاية) وهو أكبر من أي عددٍ حقيقيٍّ يمكن تصوّره، $\infty \notin \mathbb{R}$
- الرمز $(-\infty)$ ويقرأ (سالب لانهاية) وهو أصغر من أي عددٍ حقيقيٍّ يمكن تصوّره، $-\infty \notin \mathbb{R}$
- الرمز $\infty, -\infty$ لا توجد نقطتُمَا على خطّ الأعداد الحقيقية، وهما امتداد لخط الأعداد من جهتيه.



وإذا كان أ عددًا حقيقيًا فإننا نعرفُ الفترات غير المحدودة التالية:



اكتب كلاً من الفترتين $]-\infty, \text{أ}]$ ، $[\text{أ}, \infty[$ بطريقة الصّفة المميزة، ثم مثلهما على خطّ الأعداد.



اكتب الفترتين $]\text{أ}, \infty[$ ، $]-\infty, \text{أ}[$ بطريقة الصّفة المميزة، ثم مثلهما على خطّ الأعداد.



لاحظ أن:

- مجموعة الأعداد الحقيقية ح يمكن التعبير عنها على صورة الفترة $]-\infty, \infty[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $]0, \infty[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $]0, -\infty[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $]0, \infty[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $]0, -\infty[$



١ **اكتب** على صورة فترة كلاً من المجموعات الآتية، ومثلها على خط الأعداد .

أ $S = \{s : s \leq 2, s \in \mathbb{R}\}$

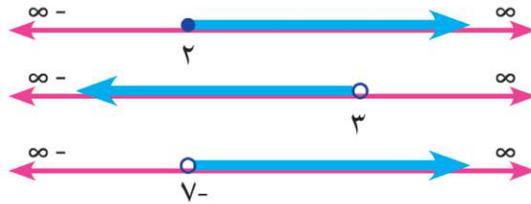
ب $S = \{s : s > 3, s \in \mathbb{R}\}$

ج $S = \{s : s < -7, s \in \mathbb{R}\}$

د $S = \{s : s \geq \sqrt{-8}, s \in \mathbb{R}\}$

هـ مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .

الحل



أ $S =]2, \infty[$

ب $S =]3, \infty[$

ج $S =]-7, \infty[$

أكمل الحل

٢ **ضع** الرمز المناسب \in أو \notin أو \supset أو \supsetneq لتكون العبارة صحيحة:

أ $3 \in]4, \infty[$ ب $[2, 1] \dots]\infty, 1[$

ج $5 \in]6, \infty[$ د $]2, 0[\dots]\infty, 0[$

هـ $3 \times 10^1 \in]\infty, 3[$ و $[1, 3-] \dots]\infty, 2[$

الحل

- أ \in ب \supset ج \notin د \supsetneq هـ \in و \supsetneq



العمليات على الفترات

حيث إن الفترات هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح، فإنه يمكن إجراء عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة على الفترات، ويمكن الاستعانة بالتمثيل البياني للفترات على خط الأعداد؛ لتحديد وتوضيح ناتج العملية ويتضح ذلك من الأمثلة التالية:

أمثلة

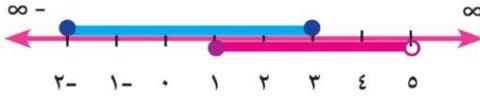


١ إذا كانت $S =]-2, 3]$ ، $V =]1, 5]$ فأوجد مستعيناً بخط الأعداد كلاً من :

ب $S \cup V$

أ $S \cap V$

الحل



أ $S \cap V =]1, 3]$

ب $S \cup V =]-2, 5]$

٢ إذا كانت $M =]2, \infty[$ ، $Y =]-\infty, 3]$ فأوجد مستعيناً بخط الأعداد كلاً من :

ج $M \cup Y$

ب $M \cap Y$

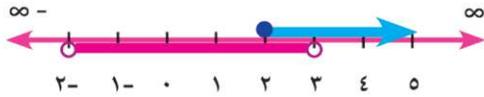
أ $M - Y$

و $Y - M$

هـ \bar{M}

د $Y \cup \{3, 2\}$

الحل



أ $M - Y =]3, \infty[$

ب $M \cap Y =]2, 3]$

ج $M \cup Y =]-\infty, \infty[$

د $Y \cup \{3, 2\} =]-\infty, 3]$

هـ $\bar{M} =]-\infty, 2]$

تدرب



ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة:

أ $]-2, 3] -]1, 5] =]5, 2-]$

ب $]-2, 3] \cup]1, 5] =]0, 1-]$

ج $]-2, 3] -]5, 2-] =]5, 2-]$

د $]-2, 3] \cap]1, 5] =]4, 1-]$

هـ $]-2, 3] \cup]5, 2-] =]5, 2-]$

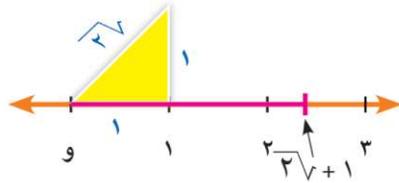
لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



فكر وناقش

أولاً: خواص جمع الأعداد الحقيقية

سبق أن حددنا موضع النقطة s التي تمثل العدد $\sqrt{2} + 1$ على خط الأعداد، وحيث إنه يمثل مجموع العددين الحقيقيين 1 ، $\sqrt{2}$ فإن مجموع كل عددين حقيقيين هو عدد حقيقي. أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الجمع.



الانغلاق إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن $(a+b) \in \mathbb{R}$

فمثلاً: كل من $2+\sqrt{3}$ ، $1+\sqrt{2}$ ، $2-\sqrt{5}$ ، $2+\sqrt{3}$ عدد حقيقي.

الإبدال إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن $a+b = b+a$

فمثلاً: $2+\sqrt{3} = \sqrt{3}+2$ ، $3-\sqrt{5} = -\sqrt{5}+3$

الدمج إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$ فإن $(a+b)+c = a+(b+c)$

فمثلاً: $(\sqrt{2}+3)+5 = 5+(\sqrt{2}+3)$ خاصية الدمج

خاصية الإبدال $(\sqrt{2}+5)+3 =$

خاصية الدمج $\sqrt{2}+(5+3) =$

$\sqrt{2}+8 =$

سوف تتعلم

- العمليات على الأعداد الحقيقية.
- خواص العمليات على الأعداد الحقيقية.

المصطلحات الأساسية

- الانغلاق.
- الإبدال.
- الدمج.
- المحايد الجمعي.
- المعكوس الجمعي.
- المحايد الضربي.
- المعكوس الضربي.
- توزيع الضرب على الجمع أو الطرح.



إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإن $a + 0 = 0 + a = a$

الصفر هو العنصر المحايد الجمعي

فمثلاً: $5\sqrt{7} = 5\sqrt{7} + 0 = 0 + 5\sqrt{7}$ ، $-4\sqrt{2} = (-4\sqrt{2}) + 0 = 0 + (-4\sqrt{2})$

لكل $a \in \mathbb{R}$ يوجد $(-a) \in \mathbb{R}$ حيث $a + (-a) = (-a) + a = 0$ صفرًا

وجود معكوس جمعي لكل عدد حقيقي

فمثلاً: $a \in \mathbb{R}$ ، معكوسه الجمعي $(-a) \in \mathbb{R}$ حيث $a + (-a) = (-a) + a = 0$ صفرًا.



أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

- + 5 = 5 + $2\sqrt{7}$
- = $(11\sqrt{7}) + 11\sqrt{7}$
- $(\dots + \dots) + 5 = 3\sqrt{7} + 7$
- المعكوس الجمعي للعدد $8\sqrt{7}$ هو
- المعكوس الجمعي للعدد $(2\sqrt{7} - 1)$ هو
- = $(3\sqrt{7}) + 3\sqrt{7}$
- = $3 - 5\sqrt{7} + 7$
- = $(7\sqrt{7} - 3) + (7\sqrt{7} + 4)$
- إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن $a - b$ تعني ناتج جمع العدد a و للعدد b .
- إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$ فإن $(a + b) + c = \dots$

ناقش مع معلمك / معلمتك و زملائك: موضحةً بأمثلة:

- هل عملية الطرح إبدائية في \mathbb{R} ؟
- هل عملية الطرح دمجية في \mathbb{R} ؟



ثانيًا: خواص ضرب الأعداد الحقيقية:

الانغلاق إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن $a \times b \in \mathbb{R}$

مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الضرب.

أي أن حاصل ضرب كل عددين حقيقيين هو عدد حقيقي.

مثلاً:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni 3 &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} \quad , \quad \mathbb{R} \ni 2\sqrt{5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} \\ \mathbb{R} \ni \pi \frac{2}{3} &= \pi \times \frac{2}{3} \quad , \quad \mathbb{R} \ni -\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{-2} \\ \mathbb{R} \ni \sqrt[3]{10} &= \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2} \quad , \quad \mathbb{R} \ni 6 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{27} \end{aligned}$$

الإبدال لكل عددين حقيقيين a, b يكون $a \times b = b \times a$

مثلاً: $\sqrt{2} \times 3 = \sqrt{2} \times 3 = 3 \times \sqrt{2}$

الدمج لكل ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c يكون

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

مثلاً:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \times (\sqrt{2} \times 5) &= \sqrt{2} \times (5 \times \sqrt{2}) = (\sqrt{2} \times 5) \times \sqrt{2} \\ 10 &= 2 \times 5 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 5 = \end{aligned}$$

لكل عدد حقيقي a يكون $a \times 1 = 1 \times a = a$

الواحد هو العنصر المحايد الضربي

مثلاً: $\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2} \times 1 = 1 \times \sqrt[5]{2}$

وجود معكوس ضربى لكل عدد حقيقى $\neq 0$

لكل عدد حقيقى $a \neq 0$

يوجد عدد حقيقى $\frac{1}{a}$

حيث $1 = a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a$ (المحايد الضربى)

مثلاً: المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ هو $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ حيث $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

لاحظ أن: $\frac{1}{b} \times a = \frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$

أي أن $1 = \frac{1}{b} \times a$ المعكوس الضربى للعدد b .

ناقش مع معلمك / معلمتك: هل عملية القسمة إبدالية فى ح؟ هل عملية القسمة دامجية فى ح؟



مثال



اكتب كلاً من الأعداد $\frac{6}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{10}{\sqrt{2}}$ بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً.

الحل

لاحظ أن المحايد الضربي 1 يمكن كتابته بالصورة $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ أو $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ أو $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ أو ...

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times 6}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times 6}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 = \frac{6}{2} \sqrt{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times 5}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times 5}{3} = \frac{5}{3} \sqrt{3}$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times 10}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times 10}{2} = \frac{10}{2} \sqrt{2}$$



تدرب

أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

أ = $\sqrt{2} \times \dots$ = $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

ب $\times \sqrt{5} = \sqrt{5} \times 3$

ج = $\sqrt{7} \times \sqrt{7}$

د = $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$

هـ المحايد الضربي في ح هو العدد

و المعكوس الضربي للعدد $\frac{3}{\sqrt{2}}$ هو

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً:

ب $\frac{8}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$

أ $\frac{10}{\sqrt{6}}$

د $\frac{20}{\sqrt{10} \times \sqrt{2}}$

ج $\frac{6}{\sqrt{3}} -$

لأي ثلاثة أعداد حقيقية أ، ب، ج يكون .

$$أ \quad (أ + ب) \times ج = (أ \times ج) + (ب \times ج) = ج \times (أ + ب)$$

$$ب \quad (أ + ب) \times ج = (أ \times ج) + (ب \times ج) = ج \times (أ + ب)$$

توزيع الضرب على الجمع



أمثلة



١ اختصر إلى أبسط صورة.

ب $(\sqrt{2} + 3)(5 + \sqrt{2})$

أ $(\sqrt{5} + 3)\sqrt{2}$

ج $2(\sqrt{3} - 2)$

الحل

أ $\sqrt{5} \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{2} = (\sqrt{5} + 3)\sqrt{2}$

$10 + \sqrt{6} = 5 \times 2 + \sqrt{2} \times 3 \times 2 =$

ب $(\sqrt{2} + 3)5 + (\sqrt{2} + 3)\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 3)(5 + \sqrt{2})$

$\sqrt{2} \times 5 + 3 \times 5 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{2} =$

$\sqrt{2}5 + 15 + 2 + \sqrt{2}3 =$

$17 + \sqrt{2}8 = \sqrt{2}5 + 17 + \sqrt{2}3 =$

ج $2(\sqrt{3} - 2) + \sqrt{3} - 2 \times 2 + 2(2) = 2(\sqrt{3} - 2)$

$5 \times 9 + \sqrt{12} - 4 =$

$\sqrt{12} - 49 =$

٢ أعط تقديراً لنتاج $(\sqrt{8} + 1) \times (\sqrt{5} + 3)$ و تحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

أولاً: تقدير $\sqrt{5}$ هو ٢ $\therefore (\sqrt{5} + 3)$ تقديرها هو $5 = 2 + 3$

تقدير $\sqrt{8}$ هو ٣ $\therefore (\sqrt{8} + 1)$ تقديرها هو $4 = 3 + 1$

$\therefore (\sqrt{8} + 1)(\sqrt{5} + 3)$ تقديرها هو $20 = 4 \times 5$

ثانياً: عند استخدام الآلة الحاسبة لحساب $(\sqrt{8} + 1) \times (\sqrt{5} + 3)$

نجد أن الناتج ٢٠,٠٤٥٩ أي أن التقدير مقبول.



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



العمليات على الجذور التربيعية

فكر وناقش

إذا كان أ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

$$\text{أولاً: } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\text{فمثلاً: } \sqrt{6} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{10 \times 2} = \sqrt{10} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{5 \times 15} = \sqrt{5} \times \sqrt{15}$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\text{فمثلاً: } \sqrt{5} \times \sqrt{4} = \sqrt{5 \times 4} = \sqrt{20}$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$$

$$\text{ثانياً: } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{b} \sqrt{b} \text{ حيث } b \neq 0$$

$$\text{فمثلاً: } \sqrt{5} \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{9} \sqrt{9} = \frac{5}{9} \sqrt{9}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \times 4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3} \sqrt{3} = \frac{16}{3} \sqrt{3}$$

$$\text{ثالثاً: } \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\text{فمثلاً: } 3 = \sqrt{9} = \frac{18}{3} \sqrt{9} = \frac{18}{27} \sqrt{9}$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6} = \frac{12}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2}$$

سوف تتعلم

إجراء العمليات على الجذور التربيعية.

ضرب عددين مترافقين.

المصطلحات الأساسية

جذر تربيعي.

عددان مترافقان.



أمثلة



١ اختصر لأبسط صورة $\frac{1}{2}\sqrt{6} + \sqrt{2}\sqrt{6} - \sqrt{3}\sqrt{6}$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{1\sqrt{6}}{2} \times 6 + \sqrt{2} \times \sqrt{36} - \sqrt{3} \times \sqrt{36} &= \frac{1}{2}\sqrt{6} + \sqrt{2}\sqrt{6} - \sqrt{3}\sqrt{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times \frac{1}{2\sqrt{6}} \times 6 + \sqrt{2}\sqrt{6} \times \sqrt{36} - \sqrt{3}\sqrt{6} \times \sqrt{36} &= \\ 2\sqrt{6} &= 2\sqrt{6} \times 3 + 2\sqrt{6} \times 6 - 2\sqrt{6} \times 6 = \end{aligned}$$

٢ إذا كان $\sqrt{5} = 2$ ، $\sqrt{5} = 1$ ، أوجد قيمة المقدار $\sqrt{5} + 2$ و $\sqrt{5} - 2$

الحل

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{5} \times 4 - 2(\sqrt{5} \times 2) &= 2(1 - \sqrt{5} \times 2) = 2 \\ \sqrt{5} \times 4 - 21 &= 1 + \sqrt{5} \times 4 - 5 \times 4 = \\ \sqrt{5} \times 4 + 9 &= 5 + \sqrt{5} \times 4 + 4 = 2(\sqrt{5} + 2) = 2 \\ 30 &= \sqrt{5} \times 4 + 9 + \sqrt{5} \times 4 - 21 = 2\sqrt{5} + 2 \end{aligned}$$



تدرب

١ ضع كلاً مما يأتي على صورة \sqrt{a} حيث a ، ب عدنان صحيحان، ب أصغر قيمة ممكنة:

ج $\sqrt{54}$	ب $\sqrt{75}$	أ $\sqrt{28}$
و $\sqrt{\frac{1}{3}}$	هـ $\sqrt{72}$	د $\sqrt{1000}$

٢ اختصر إلى أبسط صورة:

ج $\sqrt{28} \times \sqrt{7}$	ب $\sqrt{10} \times \sqrt{5}$	أ $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$
و $\sqrt{300} - \sqrt{18} + \sqrt{27}$	هـ $\sqrt{45} - \sqrt{20}$	د $\sqrt{8} + \sqrt{50}$



٢ أوجد قيمة كل من $s + v$ ، $s \times v$ في الحالات الآتية:

أ $s = \sqrt{5} + 3$ ، $v = \sqrt{5} - 1$

ب $s = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ، $v = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

ج $s = \sqrt{2} - 5$ ، $v = \sqrt{2} - 3$

العددان المترافقان

إذا كان a ، b عددين نسبيين موجبين

فإن كلاً من العددين $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ ، $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ هو مرافق للعدد الآخر .

ويكون مجموعهما $= \sqrt{a}^2 = a$ ضعف الحد الأول

وحاصل ضربهما $= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

= مربع الحد الأول - مربع الحد الثاني

حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عددٌ نسبيّ

إذا كان لدينا عددٌ حقيقيٌّ مقامه على الصورة $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$ فيجب وضعه في أبسط صورةٍ ، وذلك بضرب البسط والمقام في مرافق المقام .



أكمل

أ $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ مرافقه (.....) وحاصل ضربهما =

ب $\sqrt{3} - 5$ مرافقه (.....) وحاصل ضربهما =

ج $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ مرافقه (.....) وحاصل ضربهما =



أمثلة



١ إذا كانت $s = \frac{8}{\sqrt[3]{v}-5\sqrt{v}}$ ، ص $\frac{\sqrt[3]{v}-2}{\sqrt[3]{v}+2}$

اكتب كلاً من s ، v بحيث يكون المقام عدداً نسبياً ثم أوجد $s + v$

الحل

$$\frac{\sqrt[3]{v}+5\sqrt{v}}{\sqrt[3]{v}+2} \times \frac{8}{\sqrt[3]{v}-5\sqrt{v}} = \frac{8}{\sqrt[3]{v}-5\sqrt{v}} = s$$

$$\frac{(\sqrt[3]{v}+5\sqrt{v}) 8}{3-5} = \frac{(\sqrt[3]{v}+5\sqrt{v}) 8}{2(\sqrt[3]{v})-2(5\sqrt{v})} =$$

$$\frac{3\sqrt[3]{v}+5\sqrt{v}}{3-5} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{v}-2}{\sqrt[3]{v}-2} \times \frac{\sqrt[3]{v}-2}{\sqrt[3]{v}+2} = \frac{\sqrt[3]{v}-2}{\sqrt[3]{v}+2} = s$$

$$\sqrt[3]{v}+2 = \frac{3+3\sqrt[3]{v}+2-2}{3-2} = \frac{2(\sqrt[3]{v}-2)}{3-2} =$$

$$v+5\sqrt{v} = \sqrt[3]{v}+2-2 = \sqrt[3]{v}-2 \Rightarrow v+5\sqrt{v} = \sqrt[3]{v}-2$$

٢ إذا كانت $s = \frac{4}{\sqrt[3]{v}-\sqrt{v}}$ ، ص $\sqrt[3]{v}-\sqrt{v}$

أثبت أن s ، v عدنان مترافقان، ثم أوجد قيمة كل من المقدارين

$s^2 - 2s + v$ ، $(s - v)^2$ ماذا تلاحظ؟

الحل

$$\sqrt[3]{v}+\sqrt{v} = \frac{(\sqrt[3]{v}+\sqrt{v}) 4}{3-v} = \frac{\sqrt[3]{v}+\sqrt{v}}{\sqrt[3]{v}-\sqrt{v}} \times \frac{4}{3-v} = s$$

$$\sqrt[3]{v}-\sqrt{v} = \frac{4}{3-v} \Rightarrow s = \frac{4}{3-v}$$

$$s^2 - 2s + v = \frac{16}{(3-v)^2} - 2 \times \frac{4}{3-v} + v = \frac{16 - 8(3-v) + v(3-v)^2}{(3-v)^2} =$$

$$\frac{16 - 24 + 8v + 9v - 6v^2 + v^3}{(3-v)^2} =$$

$$\frac{v^3 - 6v^2 + 13v - 8}{(3-v)^2} =$$

$$12 =$$

$$2[(\sqrt[3]{v}-\sqrt{v}) - (\sqrt[3]{v}+\sqrt{v})] = (s-v)^2$$



$$\therefore (س - ص)^2 = (\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{7}\sqrt{2})^2 = 2[\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2}] = 2(س - ص)$$

$$12 = 3 \times 4 =$$

$$س^2 - 2سص + ص^2 = 2(س - ص)$$

ويلاحظ أن

في المثال السابق احسب كلاً من

ب (س - ص)

أ (س + ص)

ماذا تلاحظ

د س² - 2سص + ص²

ج (س + ص)(س - ص)

الحل

أ $\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{7}\sqrt{2} = ص$ ، $\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2} = س$

فإن $س + ص = \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{7}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2} = 2\sqrt{3}\sqrt{2}$

ب $(\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{7}\sqrt{2}) - (\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2}) = ص - س$

$$\sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2} =$$

ج $(س + ص)(س - ص) = (\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2})(\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{7}\sqrt{2}) =$

$$21\sqrt{4} =$$

د $س^2 - 2سص + ص^2 = (\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{7}\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{7}\sqrt{2})(\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{7}\sqrt{2}) =$

$$(3 + 21\sqrt{2} - 7) - 2(3 - 7) =$$

$$3 - 21\sqrt{2} + 7 - 3 + 7 =$$

$$21\sqrt{4} =$$

نلاحظ أن $(س + ص)(س - ص) = س^2 - 2سص + ص^2$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



العمليات على الجذور التكعيبية

فكر وناقش

لأي عددين حقيقيين a ، b :

$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \quad 1$$

فمثلاً: $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2 \times 5} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$

$\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{4 \times 3} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3}$

لأي عددين حقيقيين a ، b :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b} \quad 2$$

فمثلاً: $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{5 \times 8} = \sqrt[3]{40}$

$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2 \times 64} = \sqrt[3]{128}$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad 3$$

حيث $b \neq 0$ ، a ، $b \in \mathbb{R}$

فمثلاً: $\sqrt[3]{\frac{12}{3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad 4$$

حيث $b \neq 0$ ، a ، $b \in \mathbb{R}$

فمثلاً: $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

فكر  إذا ضربنا كلاً من البسط والمقام في $\sqrt[3]{4}$ ، فأوجد الناتج في أبسط صورة.

سوف تتعلم

العمليات على الجذور التكعيبية.

المصطلحات الأساسية

الجذر التكعيبي.



أمثلة



١ اختصر لأبسط صورة:

$$\text{ب} \quad \sqrt[3]{\frac{125}{9}} \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{24}$$

$$\text{أ} \quad \sqrt[3]{16} \sqrt[3]{5} + \frac{1}{4} \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{54}$$

الحل

$$\text{أ} \quad \sqrt[3]{2 \times 8} \sqrt[3]{5} + \frac{2}{2} \times \frac{1}{4} \sqrt[3]{2 \times 8} + \sqrt[3]{2 \times 27} = \sqrt[3]{16} \sqrt[3]{5} + \frac{1}{4} \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{54}$$

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{5} + \frac{2-\sqrt[3]{2}}{8} \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{27} =$$

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} + \frac{2-\sqrt[3]{2}}{2} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} =$$

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} =$$

$$\text{ب} \quad \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{9}} \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3 \times 8} = \frac{\sqrt[3]{125}}{8} \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{\frac{125}{9}} \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{24}$$

$$10 - \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} = \frac{10}{2} \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{8} =$$

٢ إذا كانت $\sqrt[3]{3} = س$ ، $1 - \sqrt[3]{3} = ص$

فأوجد قيمة كل من :

$$\text{ب} \quad (س - ص)^3$$

$$\text{أ} \quad (س + ص)^3$$

الحل

$$\text{أ} \quad (1 - \sqrt[3]{3} + 1 + \sqrt[3]{3})^3 = (س + ص)^3$$

$$24 = 3 \times 8 = 3(\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{2}) =$$

$$\text{ب} \quad (1 + \sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3})^3 = (س - ص)^3$$

$$8 = 2^3 =$$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



تطبيقات على الأعداد الحقيقية

فكر وناقش

الدائرة



محيط الدائرة = $2\pi r$ نق وحدة طولية.

مساحة الدائرة = πr^2 نق وحدة مربعة

حيث نق طول نصف قطر الدائرة، π (النسبة التقريبية)

أمثلة



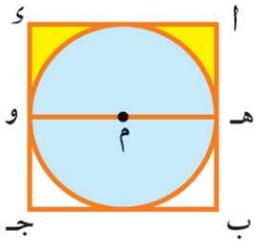
أوجد محيط دائرة مساحتها $38,5$ سم² ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

الحل

مساحة الدائرة = πr^2 نق

$$38,5 = \frac{22}{7} r^2 \quad \therefore r^2 = \frac{38,5 \times 7}{22} = \frac{49}{4}$$

$$\therefore r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ سم}$$



٢ في الشكل المقابل الدائرة م مرسومة داخل

المربع أ ب ج د، فإذا كانت مساحة الجزء

الملون باللون الأصفر $10 \frac{5}{7}$ سم²

أوجد محيط هذا الجزء ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

الحل

نفرض أن طول نصف قطر الدائرة = نق .

\therefore طول ضلع المربع = 2 نق

سوف تتعلم

لحل تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

المصطلحات الأساسية

- ل دائرة.
- ل متوازي المستطيلات.
- ل مكعب.
- ل أسطوانة دائرية قائمة.
- ل كرة.



مساحة الجزء باللون الأصفر = مساحة المستطيل أ ه و - مساحة نصف الدائرة

$$10 \frac{5}{7} = \text{نق}^2 \times 2 - \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \text{نق}^2$$

$$\frac{70}{7} = 2 \text{نق}^2 - \frac{11}{4} \text{نق}^2 = \frac{3}{4} \text{نق}^2$$

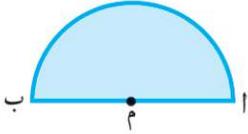
$$\therefore \text{نق}^2 = 25 \quad \therefore \text{نق} = 5 \text{ سم}$$

محيط الجزء باللون الأصفر = (أ ه + ه و + و ا) + محيط الدائرة

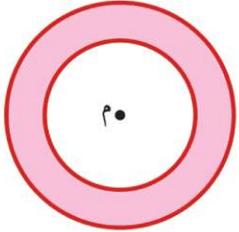
$$35 \frac{5}{7} = 5 + 10 + 5 + \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 5 \times 2 = 35 \frac{5}{7}$$



١ دائرة مساحتها 64π سم². أوجد طول نصف قطرها، ثم أوجد محيطها لأقرب عدد صحيح $(\pi \approx 3.14)$.



٢ في الشكل المقابل: أ ب قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة $12, 32$ سم² أوجد محيط الشكل.



٣ في الشكل المقابل: دائرتان متحدتان في المركز م طول نصفى قطريهما 3 سم، 5 سم. أوجد مساحة الجزء الملون بدلالة π .

متوازي المستطيلات

هو مجسم جميع أوجهه الستة مستطيلة الشكل، وكل وجهين متقابلين متطابقان إذا كانت أطوال أحرفه س، ص، ع فإن:

$$\text{المساحة الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

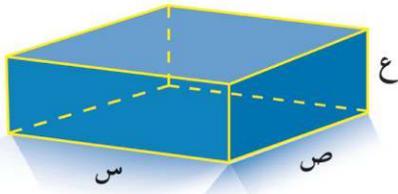
$$\text{المساحة الجانبية} = 2(س + ص) \times ع \quad \text{وحدة مربعة}$$

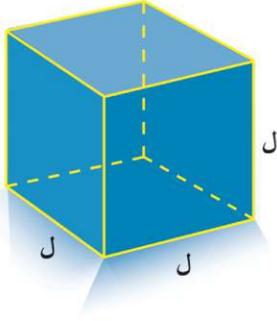
$$\text{المساحة الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + 2 \times \text{مساحة القاعدة}$$

$$\text{المساحة الكلية} = 2(س ص + ص ع + س ع) \quad \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{حجم متوازي المستطيلات} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{حجم متوازي المستطيلات} = س \times ص \times ع \quad \text{وحدة مكعبة}$$





حالة خاصة: **المكعب**

هو متوازي مستطيلات أطوال أحرفه متساوية.

إذا كان طول حرفه = l وحدة طول فإن

مساحته الجانبية = $4l^2$ وحدة مربعة

مساحة كل وجه = l^2 وحدة مربعة

حجم المكعب = l^3 وحدة مكعبة

مساحته الكلية = $6l^2$ وحدة مربعة

مثال



أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه 125 سم^3



الحل

$$\therefore l = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ سم}$$

$$\therefore l = 5 \text{ سم}$$

$$\text{المساحة الكلية} = 6l^2 = 6 \times (5)^2 = 150 \text{ سم}^2$$

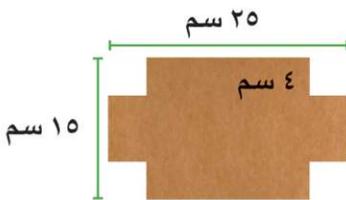
تدرب



١ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه 720 سم^3 وارتفاعه 5 سم

أوجد مساحته الكلية.

٢ أيهما أكبر حجمًا: مكعب مساحته الكلية 294 سم^2 أم متوازي مستطيلات أبعاده $7 \sqrt{2}$ ، $5 \sqrt{2}$ ، 5 سم .



٣ قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعدها 25 ، 15 سم

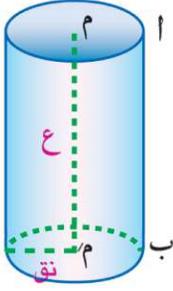
قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه 4 سم .

ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضًا على شكل متوازي

مستطيلات، أوجد حجمه ومساحته الكلية.



الأسطوانة الدائرية القائمة



هي مجسمٌ له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرة، أما السطح الجانبي فهو سطحٌ منحني يسمى سطح الأسطوانة.
 ○ إذا كانت م، م مركزى قاعدتي الأسطوانة فإن م م هو ارتفاع الأسطوانة.



هيا نفكر إذا كانت أ \in الدائرة م، ب \in الدائرة م، أ ب // م م
 ○ و قطعنا سطح الأسطوانة الجانبي عند أ ب

وبسطنا هذا السطح فإننا نحصل على سطح المستطيل أ ب ب أ
 ويكون أ ب = ارتفاع الأسطوانة، أ أ = محيط قاعدة الأسطوانة.



مساحة المستطيل أ ب ب أ = المساحة الجانبية للأسطوانة.

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة \times الارتفاع = 2π نق ع وحدة مربعة

المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

$$2\pi$$
 نق ع + 2π نق ² = وحدة مربعة

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة \times الارتفاع = π نق ² ع وحدة مربعة



مثال

قطعة من الورق على شكل مستطيل أ ب ج د، فيه أ ب = ١٠ سم، ب ج = ٤٤ سم، طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة، بحيث ينطبق أ ب على د ج وأوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\frac{22}{7} = \pi$).

الحل

محيط قاعدة الأسطوانة = ٤٤ سم.

$$44 = 2\pi$$
 نق

$$44 = 2 \times \frac{22}{7} \times \text{نق}$$

$$\therefore \text{نق} = 7 \text{ سم}$$

حجم الأسطوانة = π نق ² ع

$$= \frac{22}{7} \times 7^2 \times 10 = 1540 \text{ سم}^3$$





١ أسطوانة دائرية قائمة، طول نصف قطر قاعدتها ١٤ سم، وارتفاعها ٢٠ سم. أوجد حجمها ومساحتها الكلية.

٢ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^٣، وارتفاعها ٢٤ سم أوجد مساحتها الكلية ($\pi \approx 3,14$)

٣ أيهما أكبر حجمًا: أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم، أم مكعب طول حرفه ١١ سم.

الكرة

هي مجسمٌ سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نق) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة).



إذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دائرة مركزها هو مركز الكرة، وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة نق.

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$ وحدة مكعبة.

مساحة سطح الكرة = $4 \pi \text{ نق}^2$ وحدة مربعة.



كرة حجمها ٥٦٢,٥ π سم^٣ أوجد مساحة سطحها

الحل

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$\pi \times \frac{4}{3} \text{ نق}^3 = 562,5$$

$$\therefore \text{نق}^3 = \frac{3}{4} \times 562,5 = 421,875$$

$$\text{نق} = \sqrt[3]{421,875} = 7,5 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة سطح الكرة} = 4 \pi \text{ نق}^2 = 4 \times \pi \times (7,5)^2 = 220 \pi \text{ سم}^2$$



أوجد الحجم ومساحة السطح لكرة طول قطرها ٤,٢ سم ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الوحدة الأولى الدرس الحادي عشر

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

فكر وناقش

أولاً: حل المعادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

نعلم أن المعادلة $3x - 2 = 4$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى

حيث أن x المتغير (المجهول)

ولحل هذه المعادلة في ح

$$3x - 2 = 4$$

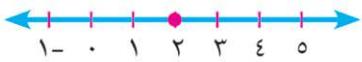
بإضافة 2 إلى طرفي المعادلة

$$3x = 6$$

ويمكن الضرب في المعكوس الضربي لمعامل x

$$3x \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3}$$

$$x = 2$$



أي أن مجموعة الحل = { 2 }

ويمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل

أمثلة



أوجد في ح مجموع حل المعادلة $\sqrt[3]{x} - 1 = 2$ ومثل

الحل على خط الأعداد.

الحل

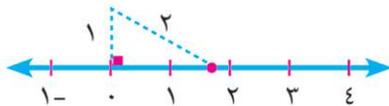
$$\sqrt[3]{x} - 1 = 2 \quad \therefore \sqrt[3]{x} = 3$$

$$\therefore \sqrt[3]{x} = 3 \quad \therefore \sqrt[3]{x} \times \frac{3}{3} = 3 \times \frac{3}{3}$$

مجموعة الحل هي $\{ \sqrt[3]{27} \}$

ويمثل الحل على خط الأعداد

كما بالشكل المقابل.



سوف تتعلم

حل المعادلة من الدرجة الأولى

في متغير واحد.

حل المتباينات من الدرجة

الأولى في متغير واحد.

المصطلحات الأساسية

المعادلة.

الدرجة المعادلة.

المتباينة.

الدرجة المتباينة.

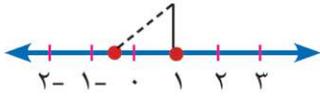
حل المعادلة.

حل المتباينة.



٢  **أوجد** في ح مجموعة حل المعادلة $س + \sqrt{2} = ١$ ، ومثل الحل على خط الأعداد.

الحل



س + $\sqrt{2} = ١$ \therefore س = $١ - \sqrt{2}$ \exists ح
ويمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل.

تدرب 

١  **أوجد** في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد.

أ س + ٥ = ٦	ب س + ٢ = ٤ + ٣	ج س - ٢ = ٤ - ٣
د س + ٥ = ٥	هـ س - ٢ = ١ - ١	و س - ١ = $\sqrt{٥}$

ثانياً: حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح وتمثيل الحل على خط الأعداد.

الخواص التالية تستخدم لحل المتباينة في ح وتكتب مجموعة الحل على صورة فترة:
إذا كانت أ ، ب ، ج أعداداً حقيقية وكان $أ > ب$ فإن:

١ $أ + ج > ب + ج$. **خاصية الإضافة.**

٢ إذا كانت $ج < ٥$ فإن $أ \times ج > ب \times ج$. **خاصية الضرب في عدد حقيقي موجب.**

٣ إذا كان $ج > ٥$ فإن $أ \times ج < ب \times ج$. **خاصية الضرب في عدد حقيقي سالب.**

أمثلة 

١  **أوجد** مجموعة حل المتباينة $س - ١ \leq ٥$ في ح ومثل الحل بيانياً.

الحل

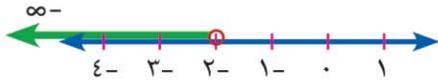
بإضافة ١ إلى طرفي المتباينة تصبح $س \leq ٦$
بضرب طرفي المتباينة في $(\frac{1}{3} < ٥)$ س ≤ ٣
 \therefore مجموعة الحل في ح هي $[٣ ، \infty)$
ويمثلها الشعاع باللون الأخضر على خط الأعداد.



٢ **أوجد** في ح مجموعة حل المتباينة ٥ - ٣ س < ١١، ومثل الحل بيانياً.

الحل

إضافة (-٥) إلى طرفي المتباينة فيكون ٣ - س < ٦
بضرب طرفي المتباينة في (- $\frac{1}{3}$) ينتج أن:
٢ - س > ٠.



أي أن مجموعة الحل في ح هي $[-2, \infty)$

ويمثلها الجزء باللون الأخضر على خط الأعداد

٣ **أوجد** في ح مجموعة حل المتباينة ٣ - ٢ س ≥ ٥ > ١ - س ومثل الحل بيانياً

الحل

إضافة (١) إلى حدود المتباينة ٣ - ٢ س ≥ ١ + ٣ - ٢ س ≥ ١ + ٥ > ١ + ١ - س
أي ٢ - س ≥ ٤ > ٦، وبضرب حدود المتباينة في ($-\frac{1}{2}$)
٣ > س ≥ ١ -



∴ مجموعة الحل في ح هي $[1, 3)$

ويمثلها على خط الأعداد الجزء باللون الأخضر.

في مثال ٣ ما مجموعة حل المتباينة في ط؟

ما مجموعة حل المتباينة في ص؟

٤ **أوجد** في ح مجموعة حل المتباينة ٣ + ٥ س ≥ ٣ + ٢ س > ٩ + س ومثل الحل بيانياً :

الحل

٣ + ٥ س ≥ ٣ + ٢ س > ٩ + س إضافة (-٢س)

٩ > ٣ + ٣ س ≥ ٣ إضافة (-٣)

٦ > ٣ س ≥ ٠ يضرب حدود المتباينة

٢ > س ≥ ٠

مجموعة الحل في ح هي $[0, 2)$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



العلاقة بين متغيرين



العلاقة بين متغيرين

فكر وناقش



يملك شخص أوراقاً مالية فئة ٥٠ جنيهاً، وأوراقاً مالية فئة ٢٠ جنيهاً، فإذا اشترى هذا الشخص جهازاً كهربائياً ثمنه ٣٩٠ جنيهاً.

فكر: كم عدد الأوراق من كل نوع التي يعطيها للبائع؟

نفرض أن س: عدد الأوراق فئة ٥٠ جنيهاً، فتكون قيمتها ٥٠س جنيهاً.

وأن ص: عدد الأوراق فئة ٢٠ جنيهاً، فتكون قيمتها ٢٠ص جنيهاً.

والمطلوب: معرفة س، ص التي تجعل: $٥٠س + ٢٠ص = ٣٩٠$

تسمى هذه العلاقة **معادلة من الدرجة الأولى**، في متغيرين يمكن قسمتها طرفي المعادلة على ١٠ فنحصل على معادلة مكافئة لها، وهي:

$$٥س + ٢ص = ٣٩$$

$$\text{وتكون ص} = \frac{٣٩ - ٥س}{٢}$$

لاحظ أن: كل من س، ص أعداد طبيعية، وفي هذه الحالة تكون س عددًا فرديًا.

يمكن تكوين الجدول المقابل لمعرفة الإمكانيات المختلفة وهي:

س	ص	(س، ص)
١	١٧	(١٧، ١)
٣	١٢	(١٢، ٣)
٥	٧	(٧، ٥)
٧	٢	(٢، ٧)
٩	سالبة	لاتصلح

يعطى البائع ورقة واحدة فئة ٥٠ جنيهاً،
١٧ ورقة فئة ٢٠ جنيهاً.

أو ٣ ورقات فئة ٥٠ جنيهاً، ١٢ ورقة فئة
٢٠ جنيهاً.

أو ٥ ورقات فئة ٥٠ جنيهاً، ٧ ورقات فئة
٢٠ جنيهاً.

أو ٧ ورقات فئة ٥٠ جنيهاً، ورتين فئة ٢٠ جنيهاً.

سوف تتعلم

العلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.

التمثيل البياني للعلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.

مصطلحات أساسية

متغير.

علاقة.

معادلة من الدرجة الأولى.





١ مع شخص أوراقاً ماليةً فئة ٥ جنيهاً، وأوراقاً ماليةً فئة ٢٠ جنيهاً. اشترى هذا الشخص من المركز التجاري بما قيمته ٧٥ جنيهاً، ما الإمكانيات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام نوعي الأوراق المالية التي معه؟

٢ مثلثٌ متساوي الساقين، محيطه ١٩سم، ما الإمكانياتُ المختلفةُ لأطوالِ أضلعه، علماً بأن أطوالَ أضلعه \exists ص +

لاحظ أن: مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

دراسة العلاقة بين متغيرين

أس + ب = ص حيث $ا \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$ تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س، ص

ويمكن إيجاد مجموعةٍ من الأزواج المرتبة (س، ص) تحقق هذه العلاقة.

مثلاً:

بدراسة العلاقة $٢س - ص = ١$

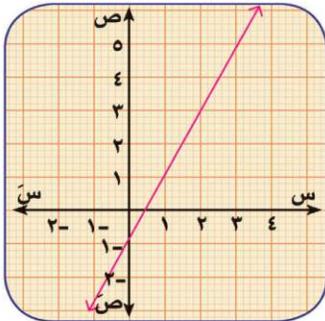
عند س = ١	تكون ص = ١	$\therefore (١, ١)$	تحقق العلاقة
عند س = ٠	تكون ص = -١	$\therefore (٠, -١)$	تحقق العلاقة
عند س = ٣	تكون ص = ٥	$\therefore (٣, ٥)$	تحقق العلاقة
عند س = -١	تكون ص = -٣	$\therefore (-١, -٣)$	تحقق العلاقة

وهكذا نجد أن هناك عدداً لانتهائي من الأزواج المرتبة التي تحقق هذه العلاقة.

لاحظ أن:

١ يمكن تمثيل العلاقة $٢س - ص = ١$ ، بيانياً باستخدام بعض الأزواج المرتبة التي حصلنا عليها.

٢ كل نقطة \exists الخط المستقيم باللون الأحمر، يمثلها زوج مرتبٌ يحقق العلاقة $٢س - ص = ١$.





١ أوجد أربع أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات الآتية ، ومثلها بيانياً:

أ $س + ص = ٣$ ب $س - ٢ص = ٥$

ج $ص = ٢$ د $س = ١$

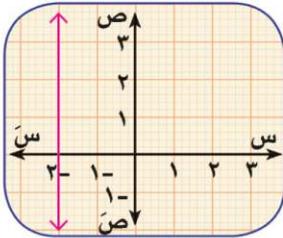
٢ إذا كان (٢، ٣-) تحقق العلاقة $٣س + ب = ١$ ، فأوجد قيمة ب.

٣ إذا كان (ك، ٢ك) تحقق العلاقة $س + ١٥ص = ١٥$ ، فأوجد قيمة ك.

التمثيل البياني للعلاقة بين متغيرين

العلاقة **أس + ب ص = ج** حيث **أ، ب** كلاهما معاً $\neq ٠$ تسمى علاقة بين المتغيرين **س، ص** ويمثلها بيانياً خط مستقيم.

إذا كانت **ب = ٠** يمثلها مستقيم يوازي محور الصادات.

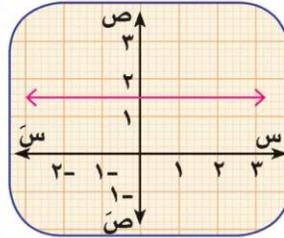


مثلاً: العلاقة $س = ٢$ يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (٠، ٢-) ويكون موازياً لمحور الصادات.

حالة خاصة:

العلاقة $س = ٠$ يمثلها محور الصادات.

إذا كانت **أ = ٠** يمثلها مستقيم يوازي محور السينات.



مثلاً: العلاقة $٢ص = ٣$ أي: $ص = \frac{٣}{٢}$ يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (٠، $\frac{٣}{٢}$) ويكون موازياً لمحور السينات.

حالة خاصة:

العلاقة $ص = ٠$ يمثلها محور السينات.

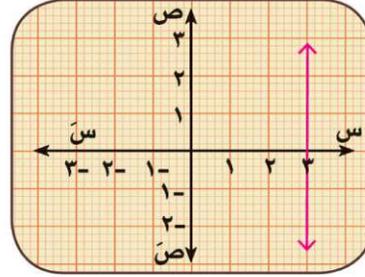
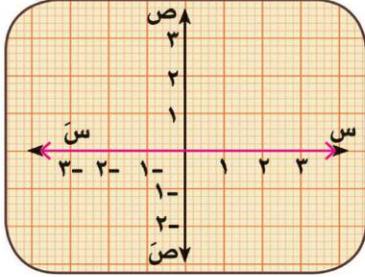


١ مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية:

أ $س٢ = ٥$ ب $ص + ١ = ٠$



٢ أوجد العلاقة التي يمثلها الخطُّ المستقيمُ باللونِ الأحمرِ في كلِّ من الشكلين التاليين:



مثال



مثل بيانياً العلاقة: $ص = 2 + س$

الحل

يمكن اختيار مجموعةٍ من الأزواج المربَّبة التي تحقِّق هذه العلاقة:

يحقق العلاقة	(٢، ١-)	$١ = س \therefore$	بوضع $ص = ٢$
يحقق العلاقة	(٠، ٣)	$٣ = س \therefore$	بوضع $ص = ٠$
تحقق العلاقة وهكذا..	(١-، ٥)	$٥ = س \therefore$	بوضع $ص = ١-$

ويمكن وضع هذه النتائج في صورة جدولٍ كالتالي:

س	١-	٣	٥	٠
ص	٢	٠	١-	$\frac{٣}{٢}$

وتمثل هذه العلاقة الخطُّ المستقيمُ باللونِ الأحمرِ.

ناقش مع معلمك:

- ١ ماذا تلاحظُ على تغير قيمة ص كلما زادت قيمة س؟
- ٢ متى يمرُّ الخطُّ المستقيمُ الممثل للعلاقة أس + ب ص = ج بنقطة الأصل؟



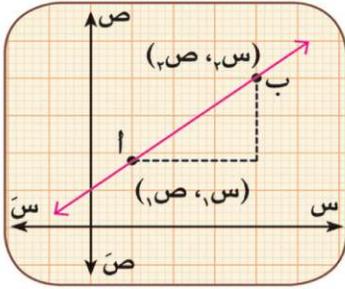
لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



ميل الخط المستقيم وتطبيقات حياتية

فكر وناقش

إذا لاحظنا تحرك نقطة على خط مستقيم من الموضع $(س_١، ص_١)$ إلى الموضع $ب (س_٢، ص_٢)$ حيث $س_٢ < س_١$ وكل من $أ، ب \in$ المستقيم **فإن:**
التغير في الإحداثي السيني = $س_٢ - س_١$
ويسمى بالتغير الأفقي
التغير في الإحداثي الصادي = $ص_٢ - ص_١$
ويسمى



سوف نتعلم

- ميل الخط المستقيم.
- تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم.

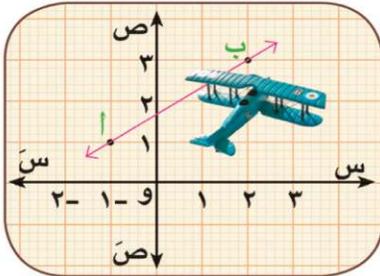
مصطلحات أساسية

- ميل.
- ميل موجب.
- ميل سالب.
- الميل يساوي صفرًا.
- الميل غير معرف.

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$$

حيث $س_٢ < س_١$ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

في الأمثلة الآتية ستدرس الحالات المختلفة للتغير الرأسى ($ص_٢ - ص_١$):



مثال ١



إذا كانت: $أ = (١، ١)$ ، $ب = (٣، ٣)$.

فإن: ميل $أ ب = \frac{٣ - ١}{٣ - ١} = ١$



تلاحظ أن:

- ١ تحركت نقطة أ على الخطّ المستقيم لأعلى لتصل إلى نقطة ب.
- ٢ $v_1 < v_2$
- ٣ الميل موجب.

مثال ٢

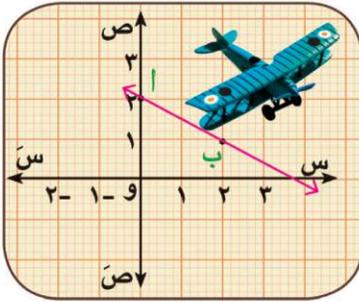


إذا كانت: أ (٢، ٠)، ب (١، ٢)

$$\text{فإن: ميل } \overline{AB} = \frac{2-0}{1-2} = -\frac{2}{1} = -2$$

تلاحظ أن:

- ١ تحركت نقطة أ على المستقيم لأسفل لتصل إلى نقطة ب.
- ٢ $v_1 > v_2$
- ٣ الميل سالب.



مثال ٣

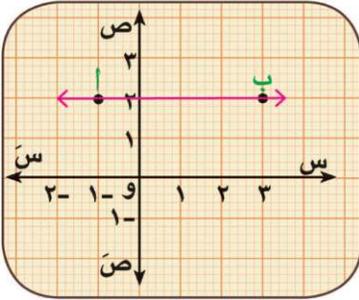


إذا كانت: أ (٢، ١-)، ب (٢، ٣)

$$\text{فإن: ميل } \overline{AB} = \frac{3-(-1)}{2-2} = \frac{4}{0} = \text{صفر.}$$

تلاحظ أن:

- ١ تحركت نقطة أ أفقيًا لتصل إلى نقطة ب.
- ٢ $v_1 = v_2$
- ٣ الميل = صفر.



مثال ٤

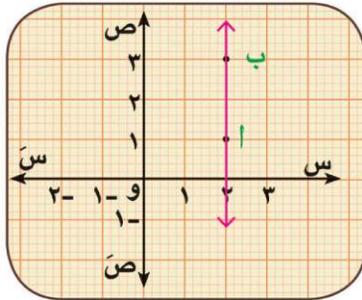


إذا كانت: أ = (١، ٢)، ب (٣، ٢) فإننا لانستطيع حساب الميل؛ لأن تعريف الميل يشترط وجود تغيير في الإحداثي السيني.

أي: $s_1 - s_2 \neq 0$

وتلاحظ أن:

- ١ تحركت نقطة أ رأسياً لتصل إلى نقطة ب.
- ٢ الميل غير معرف.
- ٣ $s_1 = s_2$



الوحدة الثانية: الدرس الثاني



١ في كلٍّ من الحالات التالية، أوجد ميل المستقيم \overleftrightarrow{AB} .

- أ $(2, 1)$ ، ب $(0, 5)$ ب $(1, -2)$ ، ب $(1, -4)$
ج $(1, -1)$ ، ب $(3, 1)$ د $(1, -3)$ ، ب $(2, 3)$

٢ إذا كانت $\overleftrightarrow{A(1, -2)}$ ، ب $(2, 3)$ ، ج $(5, 4)$ ، أوجد ميل كل من \overleftrightarrow{AB} ، \overleftrightarrow{BC} ، \overleftrightarrow{AC} ، ومثل كلاً منهما بيانياً ماذا تلاحظ؟

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين أمام كل عبارة:

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

أولاً: الجدول الآتي يبين علاقة s ، v ، وهي:

$$(v = s + 4 \text{ أو } v = s + 1 \text{ أو } v = s - 2 \text{ أو } v = s - 3 - 2)$$

ثانياً: إذا كان $(2, -5)$ يحقق العلاقة $s - 3 = v + 0$ فإن $v = \dots$

$$(1 \text{ أو } -1 \text{ أو } 11 \text{ أو } -11)$$

ثالثاً: $(2, 3)$ لا يحقق العلاقة (ص + س = ٥ أو ٣ - ص = ٣ أو ٧ = ص + س - ١)

رابعاً: تستهلك آلة للرّي ٤٧، ٢ من اللتر من السولار؛ لتشغيلها ٣ ساعات، فإذا عملت الآلة ١٠ ساعات، فإنها

تستهلك من اللتر من السولار. (٧، ٢ أو ٨ أو ٨، ٤ أو ٩، ٦)

٤ أوجد ميل المستقيم \overleftrightarrow{AB} حيث $A(-1, 3)$ ، ب $(2, 5)$ هل النقطة ج $(8, 1) \in \overleftrightarrow{AB}$

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

تطبيق (١)

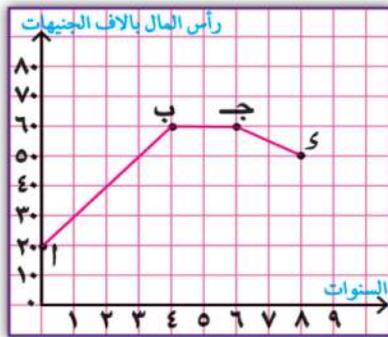
الشكل المقابل: يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات.

أ أوجد ميل كلٍّ من \overleftrightarrow{AB} ، \overleftrightarrow{BC} ، \overleftrightarrow{AC} ما دلالة كلٍّ منها؟

ب احسب رأس مال الشركة عند بدء عملها.

الحل

$$A = (20, 0) \text{، ب} = (60, 4) \text{، ج} = (60, 6) \text{، د} = (80, 8)$$



وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال السنوات الأربعة. الأولى بمعدل ١٠ آلاف جنيه.

وهو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتاً خلال السنتين الخامسة والسادسة.

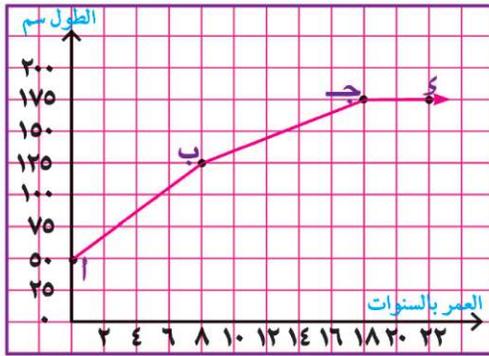
وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه.

$$\text{أولاً: ميل } \overline{أ ب} = \frac{٢٠ - ٦٠}{٠ - ٤} = ١٠$$

$$\text{ميل } \overline{ب ج} = \frac{٦٠ - ٦٠}{٤ - ٦} = \text{صفر}$$

$$\text{ميل } \overline{ج د} = \frac{٦٠ - ٥٠}{٦ - ٨} = ٥$$

ثانياً: رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى لنقطة أ = ٢٠ ألف جنيه.

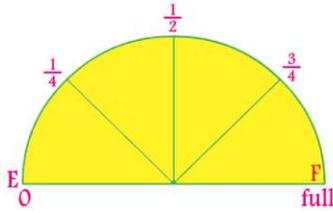


الشكل المقابل يوضح العلاقة بين طول شخص (بالسنتمتر) وعمره بالسنوات.

أولاً: أوجد ميل كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ج}$ ، $\overline{ج د}$ وما دلالة كل منها؟

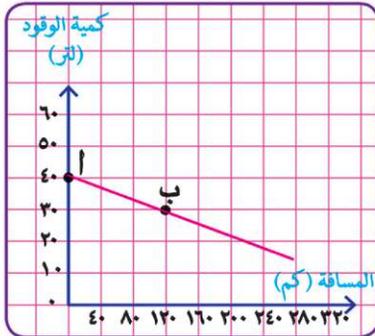
ثانياً: احسب الفرق بين طول هذا الشخص عندما كان عمره ٨ سنوات، وطوله عندما كان عمره ٣٠ سنة.

تطبيق (٢)



ملاً حازم خزان سيارته بالوقود، وسعة هذا الخزان ٤٠ لتراً، وبعد أن تحرك ١٢٠ كم، وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى ٣/٤ سعة الخزان، ارسم الشكل البياني الذى يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان والمسافة التي قطعها السيارة (علماً بأن هذه العلاقة خطية)، واحسب المسافة التي تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان.

الحل



عند البدء: أ (٤٠، ٠)

المسافة المقطوعة
كمية الوقود المستخدمة

بعد قطع ١٢٠ كم $\overline{أ ب} = (٣٠، ١٢٠)$

$$\text{ميل } \overline{أ ب} = \frac{٤٠ - ٣٠}{٠ - ١٢٠} = \frac{١}{١٢}$$

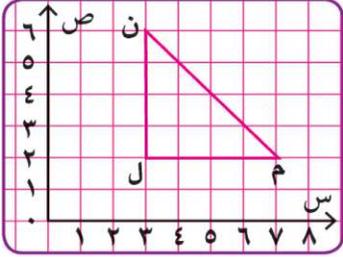
هذا الميل يعنى أن كمية الوقود بالخزان تنقص بمعدل لتر واحد كل ١٢ كم.



يفرغ الخزان عندما تقطع السيارة مسافة = $\frac{\text{كمية الوقود}}{\text{معدل النقص}} = \frac{40}{\frac{1}{13}}$

$$480 = \frac{12}{1} \times 40 =$$

لاحظ أن: أ ب يقطع محور المسافة في النقطة (0، 480) وهي تعبر عن المطلوب.



٥ في الشكل المقابل:

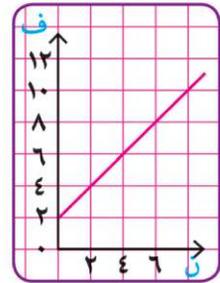
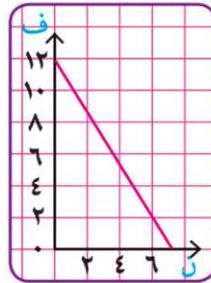
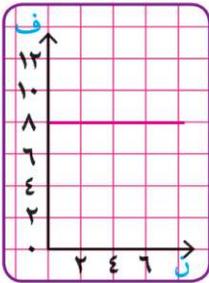
ل م ن مثلث قائم الزاوية في ل، و $\angle م = 45^\circ$ فإذا كان
ل (2، 3)، م (2، 7) أوجد إحداثي ن واحسب ميل م ن.

الحل

$$\text{إحداثي ن} = (6, 3)$$

$$\text{ميل م ن} = \frac{3-7}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$$

٦ كل من الأشكال التالية يوضح العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن (بالثانية) لجسم.
حدد موضع الجسم عند بدأ الحركة، وعند ن = 6 ثوان، وأوجد ميل المستقيم في كل حالة (ماذا
يمثل الميل؟).



ناقش معلمك في حل رقم ٦



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الإحصاء



جمع البيانات وتنظيمها

فكر وناقش

إذا بحثت ظاهرة التكدس المروري وطرق علاجه:

🔗 ما مصادرُك للحصول على البيانات؟

🔗 كيف يمكنك جمعُ البيانات حول

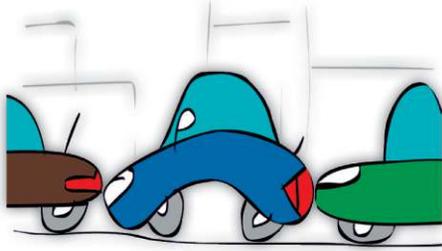
هذه الظاهرة؟

🔗 ما الطرقُ الإحصائيةُ التي سوف

تستخدمها لتحليل البيانات؟

🔗 هل تستطيعُ تفسير النتائج التي توصلت إليها؟

🔗 ما مقترحاتك لعلاج هذه الظاهرة وتحقيق السهولة المرورية؟



سوف تتعلم

🔗 كيفية جمع البيانات وتنظيمها
في جداول تكرارية ذات
مجموعات.

المصطلحات الأساسية

🔗 جمع البيانات.
🔗 تنظيم البيانات.
🔗 جدول تكرارى ذو
مجموعات.

جمع البيانات

عمل تعاوني تعاون مع زملائك في جمع البيانات من مصادرها بتوزيع

الأدوار:

أ **المجموعة الأولى:** اجمع بيانات ابتدائية عن الظاهرة محلّ الدراسة عن طريق استبيان تدور أسئلته حول (وسيلة المواصلات المستخدمة في التنقل - حالة الطرق - زمن التكدس المروري - وجود إشارات استرشادية على الطرق - التواجد الأمنى).

ب **المجموعة الثانية:** اجمع بيانات ثانوية عن الظاهرة محلّ الدراسة من النشرات المرورية - الإنترنت - مصادر الإعلام.

ج **المجموعة الثالثة:** لاحظ أى الطرق أكثر ازدحامًا، وسلوك قائدى السيارات والتزامهم بقوانين المرور، ومدى التزام المشاة بآداب الطريق، وعبور الطرق من المناطق المعدة لعبور المشاة.



تنظيم وتحليل البيانات

تعاون مع زملائك في إعداد جدول تكرارى لوسيلة المواصلات التي يستخدمها زملاؤك.

وسيلة المواصلات	مترو	حافلة	سيارة خاصة	تاكسى	دراجة	سيراً على الأقدام	المجموع
التكرار

حدّد الوسيلة الأكثر استخداماً (المنوال)

- هل هذه الوسيلة مناسبة؟ هل تساعد في علاج ظاهرة التكدّس المرورى؟ لماذا؟
- ما مقترحاتك لعلاج هذه الظاهرة في ضوء ماتوصلت إليه من نتائج؟

تنظيم البيانات وعرضها في جداول تكرارية

مثال



فيمايلي بيان بالدرجات التي حصل عليها ٣٠ طالباً في إحدى الاختبارات

١٢	١٣	٧	٦	٨	٥	٤	٧	١٠	٧
٩	١٣	١٢	١٥	٩	١١	١٢	١١	٩	٢
١٧	٨	١٣	٣	١٤	٩	٣	١٩	١٤	٥

المطلوب: تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات .

الحل

لتكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نوجد أكبر قيمة لهذه البيانات و أصغر قيمة لها؟

باعتبار مجموعة البيانات السابقة هي سـ

فإن: سـ = {س : ٢ ≥ س ≥ ١٩}

أى أن: قيم سـ تبدأ من ٢ وتنتهى عند ١٩

أى أن: المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ١٩ - ٢ = ١٧

ثانياً: تجزأ المجموعة سـ إلى عدد من المجموعات الجزئية و المتساوية المدى وليكن ٦ مجموعات.

∴ مدى المجموعة = $\frac{١٧}{٦}$ تقترب من ٣

ثالثاً: تصبح المجموعات الجزئية كالتالى.



المجموعة الأولى	- ٢
المجموعة الثانية	- ٥
المجموعة الثالثة	- ٨
المجموعة الرابعة	- ١١

وهكذا

لاحظ أن ٢ - معناها مجموعة البيانات الأكبر من أو تساوى ٢ والأقل من ٥ وهكذا.

رابعاً: تسجل البيانات فى الجدول التالى:

المجموعة	العلامات	التكرار
- ٢	////	٤
- ٥	/ ///	٦
- ٨	// ///	٧
- ١١	/// ///	٨
- ١٤	///	٣
- ١٧	//	٢
المجموع		٣٠

خامساً: يحذف عمود العلامات من الجدول فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات، ويمكن كتابته رأسياً أو أفقياً والصورة الأفقية للجدول هى كالتالى:

المجموعة	- ٢	- ٥	- ٨	- ١١	- ١٤	- ١٧	المجموع
التكرار	٤	٦	٧	٨	٣	٢	٣٠



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول
التكراري المتجمع النازل وتمثيلها بيانياً

فكر وناقش

أولاً: الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتمثيله بيانياً

مثال



يبين الجدول الآتي التوزيع التكراري لأطوال ١٠٠ تلميذ بالسنتيمترات في إحدى المدارس:

المجموع	-١٤٥	-١٤٠	-١٣٥	-١٣٠	-١٢٥	-١٢٠	-١١٥	(مجموعات) الطول بالسنتيمتر
١٠٠	٧	١٣	١٨	٢٣	١٩	١٢	٨	عدد التلاميذ (التكرار)

١ ما عدد التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟

٢ ما عدد التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟

٣ ما عدد التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟

كوّن الجدول التكراري المتجمع الصاعد لهذه البيانات ومثله بيانياً

الحل

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟ لا

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟ وما عددهم؟ نعم، ٦٢ تلميذاً.

كيف توجد عدد التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟ نجمع عدد

التلاميذ في مجموعات الطول الأقل من المجموعة ١٤٥

و الآن للإجابة عن التساؤلات السابقة بطريقة أكثر سهولة نكون الجدول

التكراري المتجمع الصاعد، وذلك كالتالي:

سوف تتعلم

- كيفية تكوين كل من الجدول التكراري المتجمع الصاعد والنازل.
- التمثيل البياني لكل من الجدول التكراري المتجمع الصاعد والنازل.

المصطلحات الأساسية

- توزيع تكراري.
- جدول تكراري.
- جدول تكراري متجمع صاعد.
- جدول تكراري متجمع نازل.
- منحنى تكراري متجمع صاعد.
- منحنى تكراري متجمع نازل.



جدول التكرار المتجمع الصاعد	
التكرار المتجمع الصاعد	الحدود العليا للمجموعات
صفر	أقل من ١١٥
٨	أقل من ١٢٠
٢٠	أقل من ١٢٥
٣٩	أقل من ١٣٠
٦٢	أقل من ١٣٥
٨٠	أقل من ١٤٠
٩٣	أقل من ١٤٥
١٠٠	أقل من ١٥٠

التكرار المتجمع الصاعد	الحدود العليا للمجموعات
٠	أقل من ١١٥
٨ = ٨ + ٠	أقل من ١٢٠
٢٠ = ١٢ + ٨	أقل من ١٢٥
٣٩ = ١٩ + ٢٠	أقل من ١٣٠
٦٢ = ٢٣ + ٣٩	أقل من ١٣٥
٨٠ = ١٨ + ٦٢	أقل من ١٤٠
٩٣ = ١٣ + ٨٠	أقل من ١٤٥
١٠٠ = ٧ + ٩٣	أقل من ١٥٠

أي

ولتمثيل الجداول التكراري المتجمع الصاعد بيانياً:

- ١ نخصص المحور الأفقي للمجموعات والمحور الرأسي للتكرار المتجمع الصاعد.
- ٢ نختار مقياساً للرسم على المحور الرأسي بحيث يتسع المحور للتكرار الكلي المتجمع الصاعد عدد عناصر المجموعة.
- ٣ نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة ونرسم الخط البياني لها بالتتابع.



ثانياً الجدول التكراريّ المتجمّع النازل وتمثيله بيانياً :

من التوزيع التكراري السابق ، والذي يبين أطوال ١٠٠ طالب بالسنتيمترات في إحدى المدارس .
أوجد: عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٥٠ سم فأكثر .
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠ سم فأكثر .
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥ سم فأكثر .
كوّن الجدول التكراري المتجمّع النازل، ثم مثله بيانياً .

الحل

لا يوجد تلاميذ أطوالهم ١٥٠ سم فأكثر .
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠ سم فأكثر هو $٧ + ١٣ = ٢٠$ طالباً
عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥ سم فأكثر هو
أكمل: $١٩ + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$

للإجابة عن هذه التساؤلات بصورة أكثر سهولة نكون الجدول التكراري المتجمّع النازل كالاتي:

جدول التكرار المتجمّع النازل	
التكرار المتجمّع الصاعد	الحدود السفلى للمجموعات
١٠٠	١١٥ فأكثر
٩٢	١٢٠ فأكثر
٨٠	١٢٥ فأكثر
٦١	١٣٠ فأكثر
٣٨	١٣٥ فأكثر
٢٠	١٤٠ فأكثر
٧	١٤٥ فأكثر
صفر	١٥٠ فأكثر

التكرار المتجمّع النازل	الحدود السفلى للمجموعات
$١٠٠ = ٨ + ٩٢$	١١٥ فأكثر
$٩٢ = ١٢ + ٨٠$	١٢٠ فأكثر
$٨٠ = ١٩ + ٦١$	١٢٥ فأكثر
$٦١ = ٢٣ + ٣٨$	١٣٠ فأكثر
$٣٨ = ١٨ + ٢٠$	١٣٥ فأكثر
$٢٠ = ١٣ + ٧$	١٤٠ فأكثر
$٧ = ٧ + ٠$	١٤٥ فأكثر
٠	١٥٠ فأكثر



ولتمثيل هذا الجدول بيانياً نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ، وذلك لنحصل على التمثيل البياني التالى:



الجدول الآتى يمثل التوزيع التكرارى لأعمار ٥٠ عاملاً بأحد المطابع :

- ٥٠	- ٤٥	- ٤٠	- ٣٥	- ٣٠	- ٢٥	- ٢٠	المجموعات
٥	٣	٩	١٠	٧	٦	التكرار

المطلوب:

- أكمل الجدول.
- ارسم فى شكل واحد المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والمنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.
- من الرسم أوجد :
أولاً : عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٥ سنة.
ثانياً : عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٥ سنة.



ناقش معلمك فى الحل

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



فكر وناقش

أولاً: الوسط الحسابي

سبق أن درست كيفية إيجاد الوسط الحسابي لمجموعة من القيم وعلمت أن:

$$\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}} = \text{الوسط الحسابي}$$

فمثلاً: إذا كان أعمار ٥ تلاميذ هي ١٣، ١٥، ١٦، ١٤، ١٧ سنة فإن:

$$\frac{١٧+١٤+١٦+١٥+١٣}{٥} = \text{الوسط الحسابي لأعمارهم}$$

$$= \frac{٧٥}{٥} = ١٥ \text{ سنة}$$

$$١٧ + ١٤ + ١٦ + ١٥ + ١٣ = ٥ \times ١٥$$

الوسط الحسابي: هو أبسط المتوسطات جميعاً، وأكثرها تداولاً، وهو القيمة التي لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية، ويمكن حسابه بجمع قيم المفردات كلها ثم نقسم على عدد المفردات.

إيجاد الوسط الحسابي لبيانات من جداول تكرارية ذات مجموعات:

كيف يمكن إيجاد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعات	- ١٠	- ٢٠	- ٣٠	- ٤٠	- ٥٠	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٢٥	٣٠	١٥	١٠٠

لاحظ: لإيجاد الوسط الحسابي لتوزيع تكراري ذي مجموعات نتبع الخطوات التالية:

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الوسط الحسابي من جدول تكراري ذي مجموعات
- كيفية حساب الوسيط من جدول تكراري ذي مجموعات.
- كيفية حساب المنوال من جدول تكراري ذي مجموعات.

المصطلحات الأساسية

- وسط حسابي.
- وسيط.
- مدرج تكراري.
- منوال.



١ نحدّد مراكز المجموعات:

مركز المجموعة الأولى = $\frac{20+10}{2} = 15$. مركز المجموعة الثانية = $\frac{30+20}{2} = 25$... وهكذا
ونظرًا لأن مدى المجموعات الجزئية متساو، وكل منها = 10
نعتبر الحدّ الأعلى للمجموعة الأخيرة = 60 فيكون:

$$\text{مركزها} = \frac{60+50}{2} = 55$$

٢ نكون الجدول الرأسي الآتي:

المجموعة	مركز المجموعة	التكرار	مركز المجموعة × التكرار
	م	ك	م × ك
- 10	15	10	150
- 20	25	20	500
- 30	35	25	875
- 40	45	30	1350
- 50	55	15	825
المجموع		100	3700

$$\text{٣ الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}}$$

$$37 = \frac{3700}{100} =$$



١ إذا كان الوسط الحسابي لدرجات تلميذ في الخمسة أشهر الأولى هي 23,8 فما الدرجة التي يجب أن يحصل عليها في الشهر السادس ليكون الوسط الحسابي لدرجاته 24 درجة؟

٢ فيما يلي التوزيع التكراري لأوزان 30 طفلاً بالكيلوجرامات.

الوزن بالكيلو جرام	- 6	- 10	- 14	- 18	- 22	- 26	- 30	المجموع
التكرار	2	3	8	6	4	2	30

أكمل الجدول ثم أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع.



ثانياً: الوسيط

هو القيمة التي تتوسط مجموعة المفردات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها.

إيجاد الوسيط لتوزيع تكراري ذي المجموعات بيانياً:

- ١ تنشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد أو النازل ، ثم نرسم المنحنى التكراري المتجمع له.
- ٢ نحدّد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$.
- ٣ نحدّد النقطة أعلى المحور الرأسي (التكرار) والتي تمثل ترتيب الوسيط.
- ٤ نرسم مستقيماً أفقياً من نقطة أيقطع المنحنى في نقطة نرسم منها عموداً على المحور الأفقي ؛ ليقطعه في نقطة تمثل الوسيط.



مثال ١

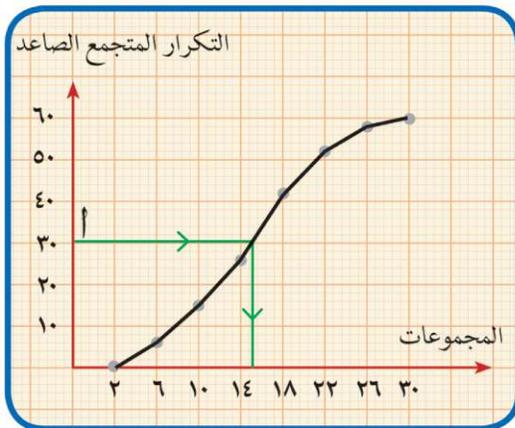
التوزيع التكراري الآتي يبين درجات ٦٠ طالباً في أحد الاختبارات

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	المجموع
التكرار	٦	٩	١٢	١٥	١٠	٥	٣	٦٠

أوجد الوسيط لهذا التوزيع مستخدماً جدول التكرار المتجمع الصاعد.

الحل

- ١ ننشئ الجدول التكراري المتجمع الصاعد. $\frac{60}{2} = 30$ نوجد ترتيب الوسيط =
- ٢ نرسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد ومن الرسم نوجد الوسيط.



التكرار المتجمع الصاعد	الحدود العليا للمجموعات
صفر	أقل من ٢
٦	أقل من ٦
١٥	أقل من ١٠
٢٧	أقل من ١٤
٤٢	أقل من ١٨
٥٢	أقل من ٢٢
٥٧	أقل من ٢٦
٦٠	أقل من ٣٠

من الرسم الوسيط = ١٤,٨ من الدرجة



فخر هل يمكنك إيجاد الوسيط باستخدام الجدول التكرارى المتجمع النازل؟
هل تختلف قيمة الوسيط فى هذه الحالة.

مثال ٢

التوزيع التكرارى الآتى يبين الأجر اليومى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع.

الأجر بالجنيه (المجموعات)	١٥ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	المجموع
عدد العمال (التكرار)	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

المطلوب:

- ١ رسم المنحنيين المتجمع الصاعد والنازل لهذا التوزيع معاً.
- ٢ هل يمكن إيجاد الأجر الوسيط من هذا المنحنى؟

الحل

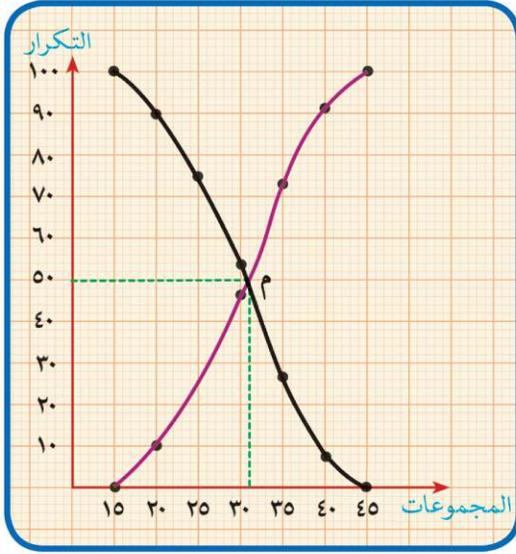
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع	الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع
أقل من ١٥	صفر	١٥ فأكثر	١٠٠
أقل من ٢٠	١٠	٢٠ فأكثر	٩٠
أقل من ٢٥	٢٥	٢٥ فأكثر	٧٥
أقل من ٣٠	٤٧	٣٠ فأكثر	٥٣
أقل من ٣٥	٧٢	٣٥ فأكثر	٢٨
أقل من ٤٠	٩٢	٤٠ فأكثر	٨
أقل من ٤٥	١٠٠	٤٥ فأكثر	صفر

لاحظ أن:

المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد يتقاطع مع المنحنى التكرارى المتجمع النازل فى نقطة واحدة هى نقطة م .



الوحدة الثالثة الدرس الثالث



$$\begin{aligned} \text{الإحداثى الرأسى لنقطة م} &= 50 \\ \frac{100}{2} &= \\ \text{ترتيب الوسيط} &= \end{aligned}$$

∴ الإحداثى الأفقى لنقطة م يعين الوسيط

كل ١٠ مم من المحور الأفقى تمثل ٥ جنيهات
أكمل ٢ مم تمثل

$$\text{الأجر الوسيط} = 30 + \frac{5 \times 2}{10} = 31 \text{ جنيهًا.}$$



ارسم منحنى التكرار المتجمع النازل للتوزيع التكرارى التالى ثم أوجد قيمة الوسيط.

المجموعات	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	المجموع
التكرار	٤	٦	١٠	١٧	١٠	٣	٥٠

ثالثًا: المنوال

هو القيمة الأكثر شيوعًا فى مجموعة المفردات أى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها من القيم.



الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ تلميذًا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦
التكرار	٣	٥	٨	١٠	٧	٥	٢

أوجد المنوال لهذا التوزيع بيانياً.

الحل

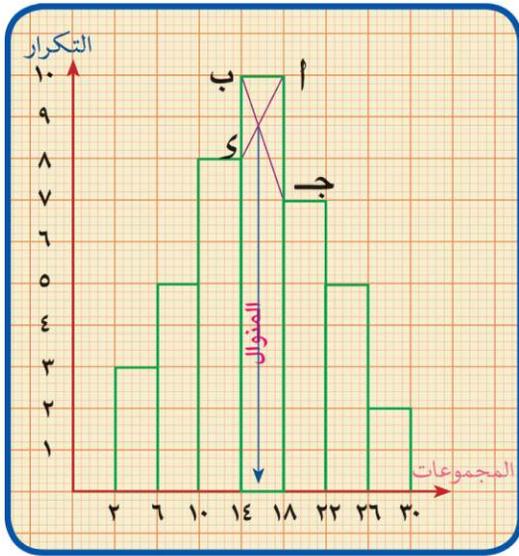
يمكن إيجاد المنوال لهذا التوزيع بيانياً باستخدام المدرج التكرارى، وذلك كالآتى:

أولاً: ارسم المدرج التكرارى

١ نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقىاً لتمثيل المجموعات، والآخر رأسياً لتمثيل تكرار كل مجموعة.



- ٢ نقسم المحور الأفقي إلى عددٍ من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب لتمثيل المجموعات.
- ٣ نقسم المحور الرأسي إلى عددٍ من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب بحيث يمكن تمثيل أكبر تكرارٍ في المجموعات.
- ٤ نرسم مستطيلًا قاعدته هي المجموعة (٢-) وارتفاعه يساوي التكرار (٣).
- ٥ نرسم مستطيلًا ثانيًا ملاصقًا للمستطيل الأول قاعدته هي المجموعة (٦-) وارتفاعه يساوي التكرار (٥).
- ٦ نكرر رسم باقى المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (٢٦-).



ثانيًا: إيجاد المونوال من المدرج التكرارى:

لإيجاد المونوال من المدرج التكرارى نلاحظ أن

المجموعة الأكثر تكرارًا هي المجموعة (١٤-) وتسمى المجموعة المونوالية. لماذا؟

نحدد نقطة تقاطع AB ، BC من الرسم، ونسقط منها عمودًا على المحور الأفقى يحدد القيمة المونوالية للتوزيع.

من الرسم ما القيمة المونوالية؟

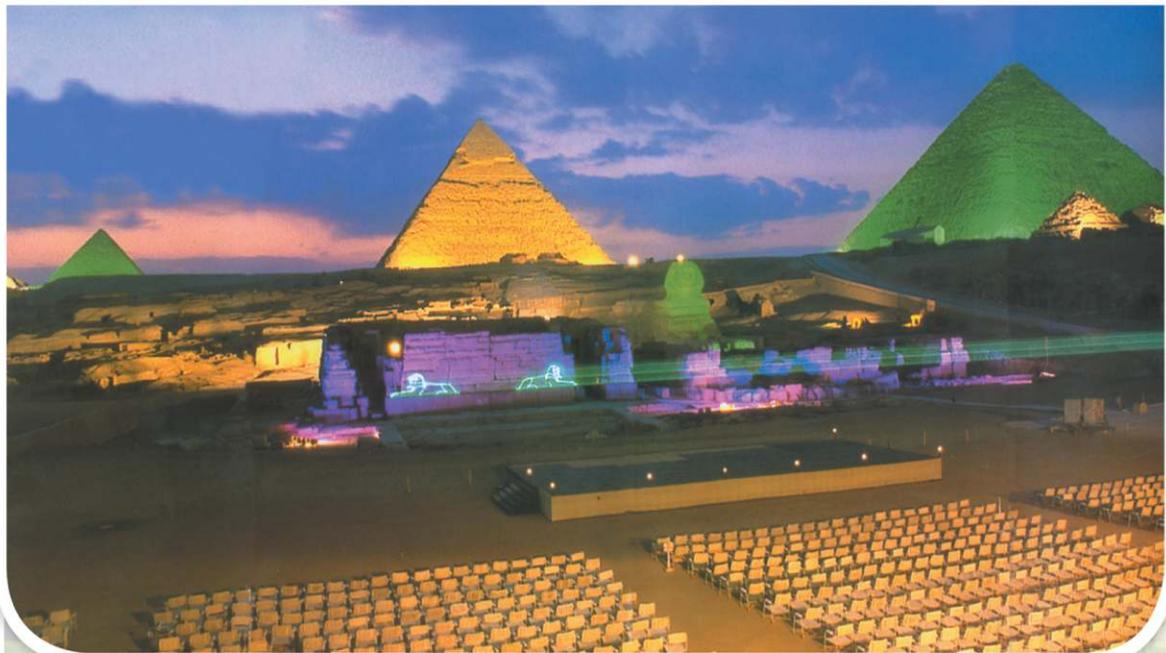
ناقش معلمك فى الحل



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



متوسطات المثلث
والمثلث المتساوي الساقين

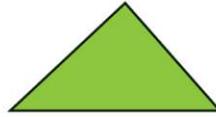
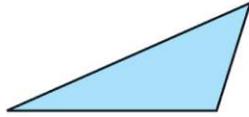
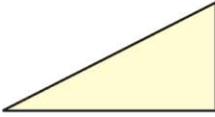
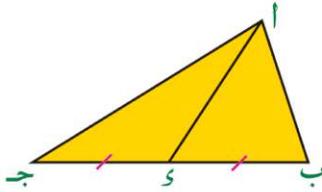


متوسطات المثلث

فكر وناقش

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

في \triangle $أ ب ج$: $ك$ منتصف $ب ج$
 فيكون $أ ك$ متوسط للمثلث
 - ما عدد متوسطات أي مثلث؟
 - ارسم المتوسطات في كل من المثلثات التالية:



سوف تتعلم

متوسطات المثلث

المثلث الثلاثيني الستيني.

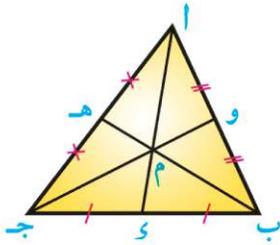
المصطلحات الأساسية

متوسط للمثلث.

مثلث ثلاثيني ستيني

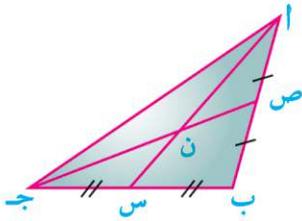
نظرية (1)

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة



في \triangle $أ ب ج$: إذا كانت $ك$ منتصف $ب ج$ ،
 هـ منتصف $أ ج$ ، و $و$ منتصف $أ ب$.
 فإن: $أ ك$ ، $ب هـ$ ، $ج و$ تتقاطع في نقطة واحدة.

تدرب



في الشكل المقابل:
 $أ ب ج$ مثلث فيه $س$ منتصف $ب ج$ ،
 $ص$ منتصف $أ ب$ ، $أ س \cap ج ص = \{ن\}$.



١ ارسم ب ن ل يقطع أ ج في ع،
أوجد بالقياس طول أ ع ، طول ج ع .
هل أ ع = ج ع؟ فسر إجابتك؟

٢ قس الأطوال ثم أكمل:

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} ، \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{ن ص}}{\text{ن ج}} ، \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{ن س}}{\text{ن أ}}$$

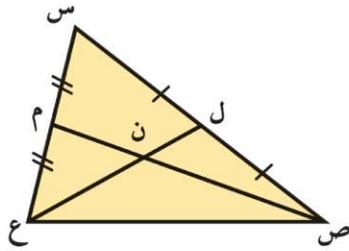
إذا كانت قياساتك دقيقة فإن $\frac{1}{2} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} ، \frac{1}{2} = \frac{\text{ن ص}}{\text{ن ج}} ، \frac{1}{2} = \frac{\text{ن س}}{\text{ن أ}}$

نظرية (٢)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة
أو بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

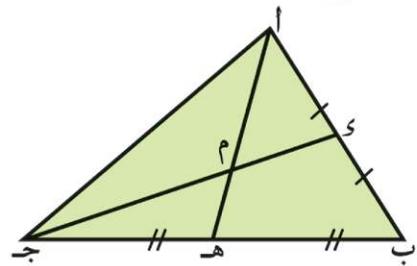
تدرب

أكمل



٢

ل ع = ١٥ سم ، ص م = ١٨ سم ، س ص = ٢٠ سم
ن ل = ، ن ص =
محيط \triangle ن ل ص =



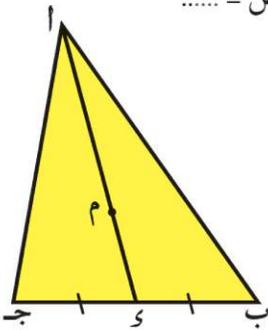
١

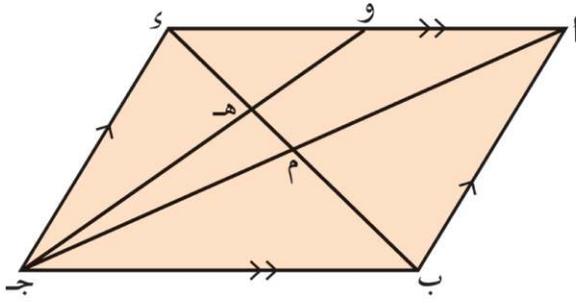
م ه = ٣ سم ، م ج = ٨ سم
م أ = ، م ه =
م ه = أ ه ، م ج = ج ي

حقيقة

أ ي متوسط في \triangle أ ب ج ، م \in أ ي .
إذا كان: أ م = ٢ م ي

فإن: م تكون نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب ج .





مثال (١)



في الشكل المقابل:

أب ج د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م،

هـ د \exists م حيث $ك هـ = ٢ هـ م$ ،

رسم ج هـ فقطع أ د في و.

أثبت أن: أ و = و د

البرهان: في \square أ ب ج د

\therefore أ ج \cap ب د = {م}

في \triangle و أ ج

\therefore م منتصف أ ج

\therefore هـ د \exists م، $ك هـ = ٢ هـ م$

\therefore هـ نقطة تقاطع متوسطات المثلث

\therefore هـ د \exists ج و

\therefore م منتصف أ ج

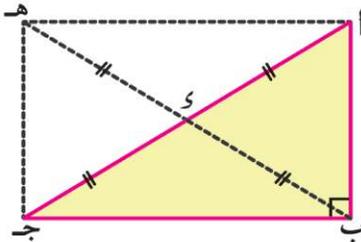
\therefore م منتصف لـ و للمثلث

\therefore ج و متوسط للمثلث، و منتصف أ د

نظرية (٣)



طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات: أ ب ج مثلث فيه \sphericalangle ب = 90°

ب د متوسط في \triangle أ ب ج

المطلوب: إثبات أن: ب د = $\frac{١}{٢}$ أ ج

العمل: نرسم ب ك ونأخذ نقطة هـ \exists ب ك بحيث ب د = د هـ

البرهان:

\therefore الشكل أ ب ج هـ فيه أ ج ، ب هـ ينصف كل منهما الآخر

\therefore الشكل أ ب ج هـ متوازي أضلاع

\therefore الشكل أ ب ج هـ مستطيل

\therefore و \sphericalangle ب = 90°



$$\therefore \text{ب ه} = \text{أ ج}$$

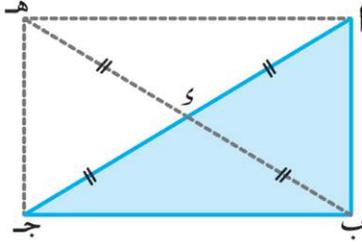
وهو المطلوب

$$\therefore \text{ب ي} = \frac{1}{2} \text{أ ج}$$

$$\therefore \text{ب ي} = \frac{1}{2} \text{ب ه}$$

عكس نظرية ٣

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات: أ ب ج مثلث، $\overline{\text{ب ي}}$ متوسط، $\text{أ ي} = \text{ب ي} = \text{ب ي}$ ج

المطلوب: إثبات أن $\angle \text{أ ب ج} = 90^\circ$

العمل: نرسم $\overline{\text{ب ي}}$ ونأخذ نقطة ه $\in \overline{\text{ب ي}}$ بحيث $\text{ب ي} = \text{ي ه}$

البرهان:

$$\therefore \text{ب ي} = \frac{1}{2} \text{ب ه} = \frac{1}{2} \text{أ ج}$$

$$\therefore \text{ب ه} = \text{أ ج}$$

\therefore الشكل أ ب ج ه فيه $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overline{\text{ب ه}}$ متساويان في الطول وينصف كل منهما الآخر

\therefore الشكل أ ب ج ه مستطيل

وهو المطلوب

$$\therefore \angle \text{أ ب ج} = 90^\circ$$

نتيجة

طول الضلع المقابل لزاوية قياسها 90° في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر

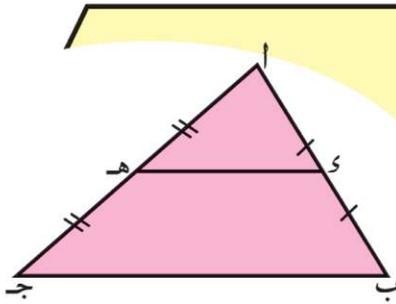


تذكر أن

في المثلث أ ب ج إذا كانت $\overline{\text{ي ه}}$ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ،
ه منتصف $\overline{\text{أ ج}}$ فإن

$$١ \text{ } \text{ك ه} = \frac{1}{2} \text{ب ج}$$

$$٢ \text{ } \text{ك ه} \parallel \text{ب ج}$$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



المثلث المتساوي الساقين

فكر وناقش

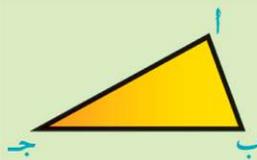
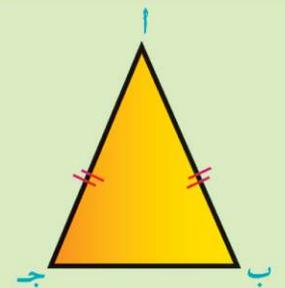
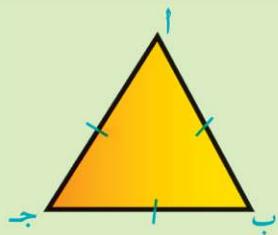
سوف تتعلم

- خواص المثلث المتساوي الساقين.
- تصنيفات المثلث المتساوي الساقين.

المصطلحات الأساسية

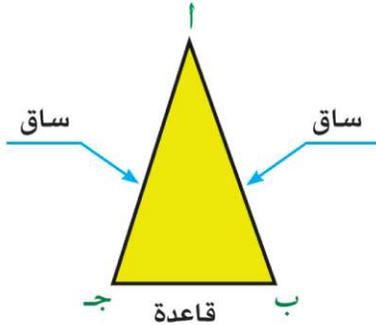
- مثلث متساوي الساقين.
- مثلث متساوي الأضلاع.
- مثلث مختلف الأضلاع.

علمت أن المثلثات تصنف حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع:

مثلث مختلف الأضلاع	مثلث متساوي الساقين (متطابق الضلعين)	مثلث متساوي الأضلاع (متطابق الأضلاع)
 <p> $a \neq b \neq c$ $a \neq b$ $a \neq c$ $b \neq c$ </p>	 <p> $a = b$ </p>	 <p> $a = b = c$ </p>

في الشكل المقابل:

لاحظ أن: الضلعين a ، b ، c متطابقان (متساويان في الطول).



لذلك يسمى المثلث a b c بالمثلث المتساوي الساقين وتسمى النقطة a رأس المثلث، b c قاعدته والزوايتان b ، c زوايتا قاعدة المثلث



خواص المثلث المتساوي الساقين

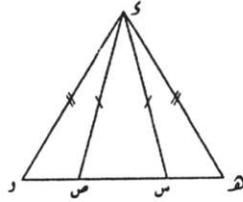
في أيّ مثلث متساوي الساقين:

- مانوع كل من زاويتي القاعدة؟ (حادّة - قائمة - منفرجة)
- مانوع زاوية الرأس؟

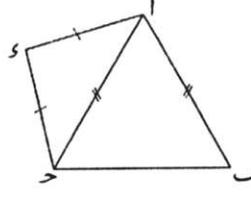


مثال

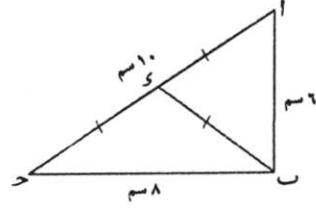
في كل من الأشكال الآتية اذكر المثلثات المتساوية الساقين وحدد قاعدتها ثم لاحظ نوع زاويتي القاعدة وزاوية رأس المثلث .



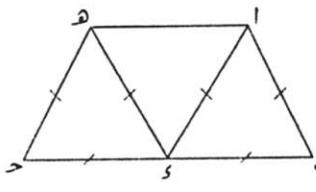
(شكل ٣)



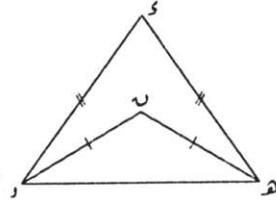
(شكل ٢)



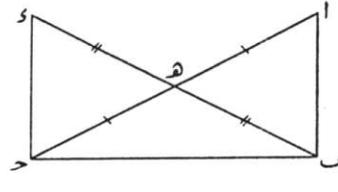
(شكل ١)



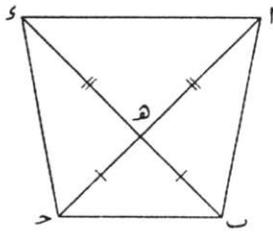
(شكل ٦)



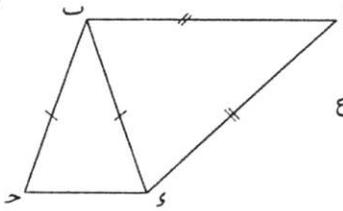
(شكل ٥)



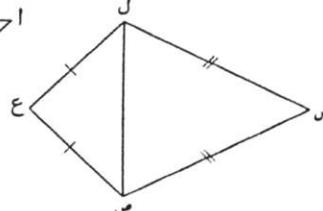
(شكل ٤)



(شكل ٩)



(شكل ٨)



(شكل ٧)

ناقش مع معلمك في الحل

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

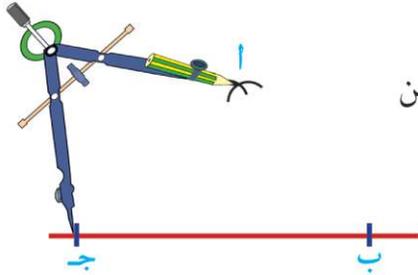


نظريات المثلث المتساوي الساقين

فكر وناقش

هل توجد علاقة بين قياس زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين؟
للتعرف على ذلك قم بالنشاط التالي:

نشاط



باستخدام الفرجار

١ ارسم عدة مثلثات متساوية الساقين
كما يوضح ذلك الرسم المقابل
حيث $أب = أ ج$.

٢ **أوجد** باستخدام

المنقلة قياس كل من زاويتي القاعدة $\triangle أ ب ج$ ، $\triangle أ ج ب$.

٣ سجّل البيانات التي حصلت عليها في جدول كالتالي، وقارن بين القياسات في كل حالة.

رقم المثلث	و ($\triangle أ ب ج$)	و ($\triangle أ ج ب$)
١		
٢		
٣		

٤ احفظ نشاطك في ملف الإنجاز

نظرية (أ)

زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان

المعطيات: $أ ب ج$ مثلث فيه $أ ب \equiv أ ج$

المطلوب: إثبات ان $\angle ب \equiv \angle ج$

سوف تتعلم

العلاقة بين زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين.

العلاقة بين قياسات زاويا المثلث المتساوي الأضلاع.

العلاقة بين الضلعين المقابلين لزاويتي متساويتين في مثلث.

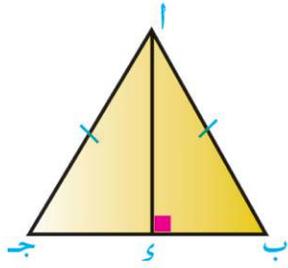
إذا تطابقت زاويا مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع.

المصطلحات الأساسية

مثلث متساوي الساقين.

زاويتي القاعدة.





(معطى)
(ضلع مشترك)
(وتر و ضلع)
وهو المطلوب

العمل : نرسم $اى \perp اى ب ج$

البرهان : المثلثان $اى ب$ ، $اى ج$ قائما الزاوية فيهما

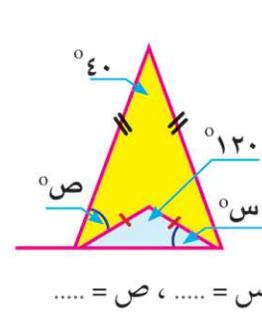
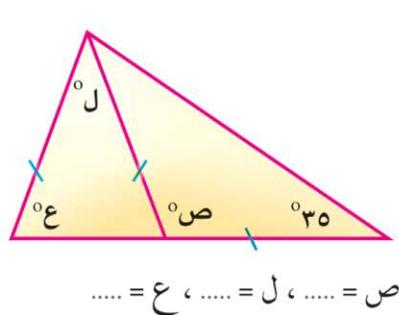
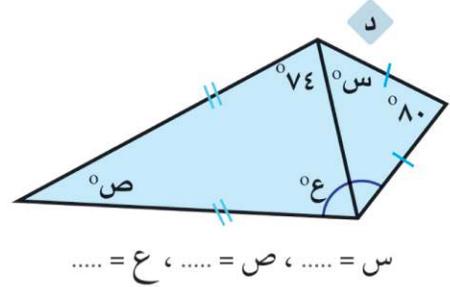
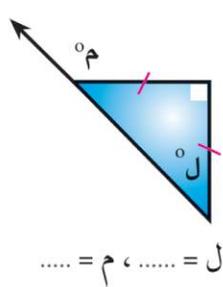
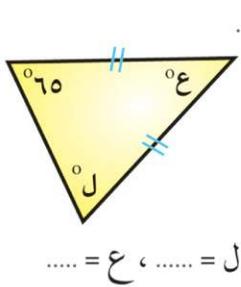
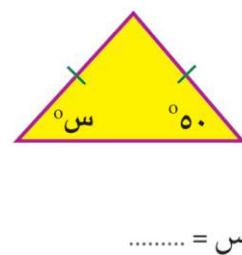
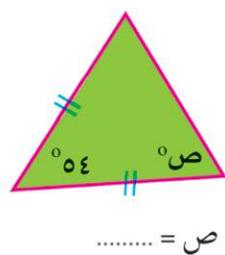
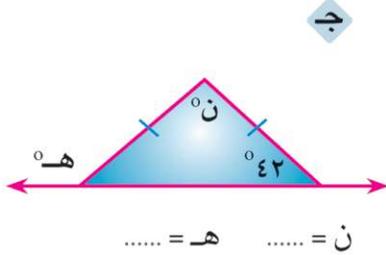
$$\left. \begin{array}{l} \overline{اى ب} \equiv \overline{اى ج} \\ \overline{اى} \end{array} \right\}$$

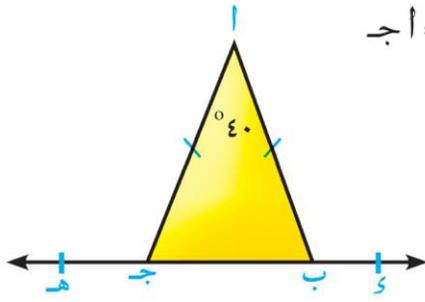
$\therefore \triangle اى ب \equiv \triangle اى ج$

وينتج من التتابق أن $\triangle ب \equiv \triangle ج$



١ في كلٍّ من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى قياس الزاوية:





٢ في الشكل المقابل أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ ج

و (أ) = ٤٠°، و $\angle ج ب ج = \angle ب ج ج$ ، هـ \in $\overrightarrow{ب ج}$

أولاً: أوجد و (أ ب ج)

ثانياً: اثبت أن $\triangle أ ب ج \equiv \triangle أ ج هـ$

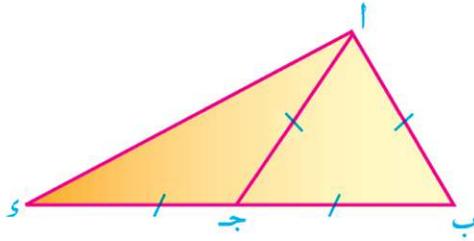
فكّر هل مكملات الزوايا المتساوية في القياس تكون متساوية القياس؟

نتيجة

إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة ويكون قياس كل منها ٦٠°



مثال (١)



في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع.

و $\angle ب ج ج = \angle ج ب ج$ ، بحيث ب ج = ج ج .

اثبت أن $\overline{ب أ} \perp \overline{أ س}$

المعطيات: أ ب = ب ج = ج أ = ج ج، و $\angle ب ج ج = \angle ج ب ج$

المطلوب: إثبات أن: $\overline{ب أ} \perp \overline{أ س}$

البرهان: $\triangle أ ب ج$ متساوي الأضلاع.

نتيجة $\therefore \angle أ ب ج = \angle ب ج ج = \angle ج ب ج = 60^\circ$

$\therefore \angle ب ج ج = \angle ج ب ج$ $\therefore \triangle ب ج ج$ خارجة عن $\triangle أ ج ج$

(١) $\angle أ ب ج = \angle ج ب ج + \angle ب ج ج = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

في $\triangle أ ج ج$

(٢) $\therefore \angle ج أ ج = \angle ج ج أ = 60^\circ$

من (١)، (٢) ينتج أن: $\angle أ ج ج = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$



$$\therefore \text{ق} (\triangle باى) = \text{ق} (\triangle باج) + \text{ق} (\triangle جاى)$$

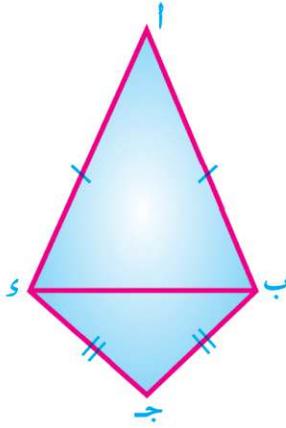
$$\therefore \text{ق} (\triangle باى) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

$\therefore \text{با} \perp \text{اى}$ وهو المطلوب

لاحظ أن: قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.



مثال



٢ في الشكل المقابل: $اب = اى$ ، $بج = جى$

اثبت أن $\triangle ابج \equiv \triangle اىج$

المعطيات: $اب = اى$ ، $بج = جى$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ابج \equiv \triangle اىج$

البرهان: في $\triangle ابى$

$$\therefore اب = اى$$

$$(1) \quad \text{ق} (\triangle ابى) = \text{ق} (\triangle اىب)$$

في $\triangle جبى$

$$\therefore جب = جى$$

$$(2) \quad \text{ق} (\triangle جبى) = \text{ق} (\triangle جىب)$$

بجمع (1)، (2) ينتج أن:

$$\text{ق} (\triangle ابى) + \text{ق} (\triangle جبى) = \text{ق} (\triangle اىب) + \text{ق} (\triangle جىب)$$

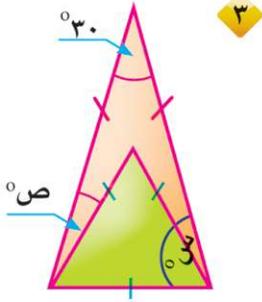
$$\therefore \text{ق} (\triangle ابج) = \text{ق} (\triangle اىج)$$

$\therefore \triangle ابج \equiv \triangle اىج$ ، وهو المطلوب.



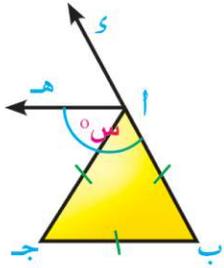


فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم لقياس الزاوية:

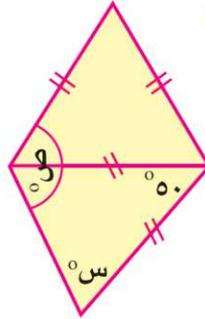


..... = ص ، = س

٦ $\overline{أه}$ منصف $\triangle جاي$

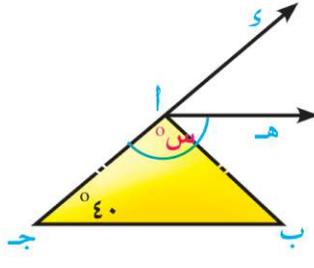


..... = س

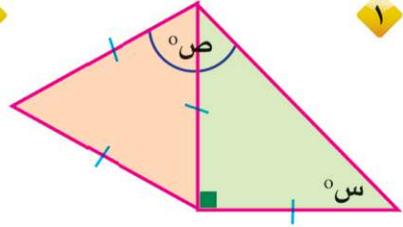


..... = ص ، = س

٥ $\overline{أه} \parallel \overline{بج}$

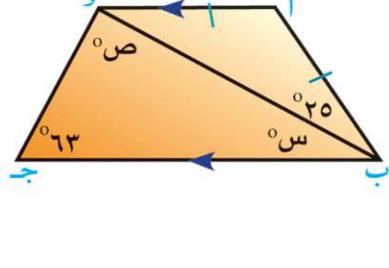


..... = س



..... = ص ، = س

٤ $\overline{أص} \parallel \overline{بج}$



..... = ص ، = س

نشاط ارسم المثلث أب ج فيه ب ج = ٧ سم، و ($\triangle ب$) = ٩ و ($\triangle ج$) = ٥٠ ثم قس طول كل من أب ، أج ، كرر النشاط باختيار قياسات أخرى لطول ب ج وقياس زاويتي ب ، ج و أكمل الجدول:

رقم المثلث	ب ج	و ($\triangle ب$)	و ($\triangle ج$)	أب	أج
١	٧ سم	٥٠	٥٠
٢
٣
٤

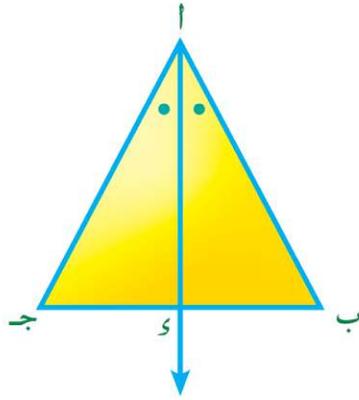
١ هل طول أب = طول أج ؟ ٢ هل $\overline{أب} \equiv \overline{أج}$ ؟

٣ كيف يمكنك تفسير هذه النتائج هندسياً؟



نظرية (٢)

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ، ويكون المثلث متساوي الساقين.



المعطيات: \triangle أ ب ج فيه \triangle ب \equiv \triangle ج

المطلوب: إثبات أن $\overline{اى} \equiv \overline{اى}$

العمل: ننصف \triangle ب أ ج بالمنصف اى ← يقطع ب ج فى س

البرهان: \triangle ب \equiv \triangle ج

$\therefore \angle (ب) = \angle (ج)$

\therefore اى ← ينصف \triangle ب أ ج

$\therefore \angle (ب اى) = \angle (ج اى)$

\therefore مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\therefore \angle (ب اى) = \angle (ج اى)$

\therefore المثلثان أ ب ، اى ج فيهما

اى ضلع مشترك

$\angle (ب اى) = \angle (ج اى)$

$\angle (ب اى) = \angle (ج اى)$

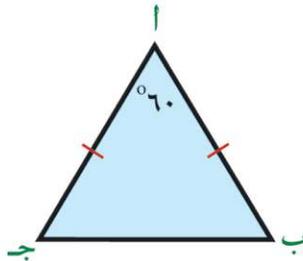
$\therefore \triangle اى ب \equiv \triangle اى ج$

وينتج من التطابق أن $\overline{اى} \equiv \overline{اى}$

ويكون \triangle أ ب ج متساوي الساقين.

نتيجة

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع.



فى الشكل المقابل أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه:

أ ب = أ ج ، $\angle (ب اى) = 60^\circ$

أكمل $\angle (ب اى) = \angle (ج اى) = \dots = \dots$

أى أن: $\triangle \equiv \triangle \equiv \dots$

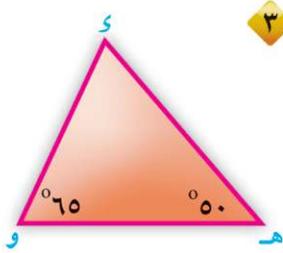
$\therefore \triangle$ أ ب ج هو مثلث



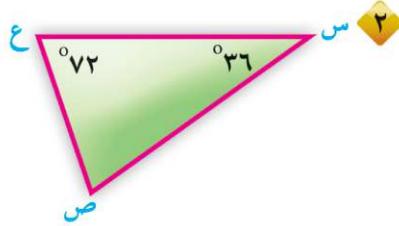
لاحظ أن: المثلث المتساوي الساقين الذي قياس إحدى زواياه 60° يكون متساوي الأضلاع.



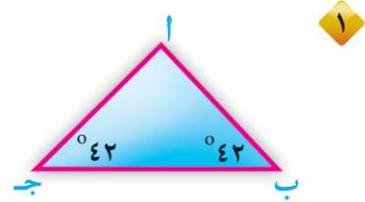
في كلٍّ من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول كما في المثال ١ :



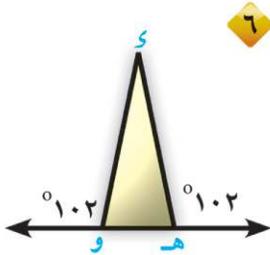
..... =



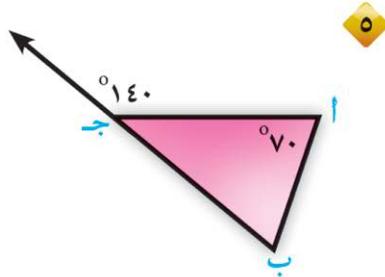
..... =



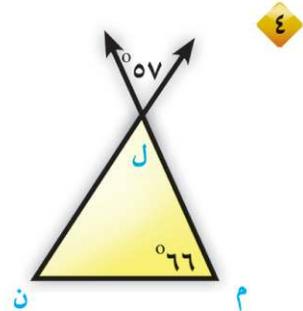
أب = أ ج



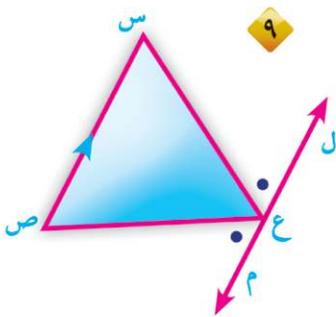
..... =



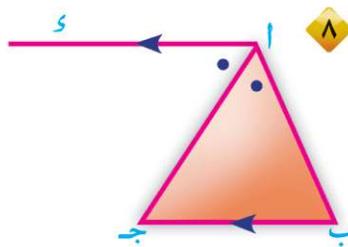
..... =



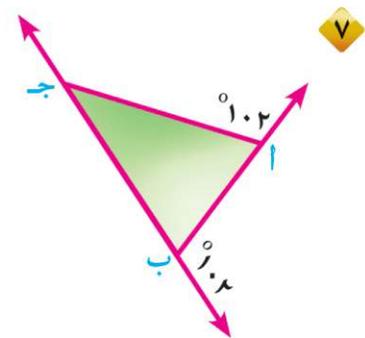
..... =



..... =

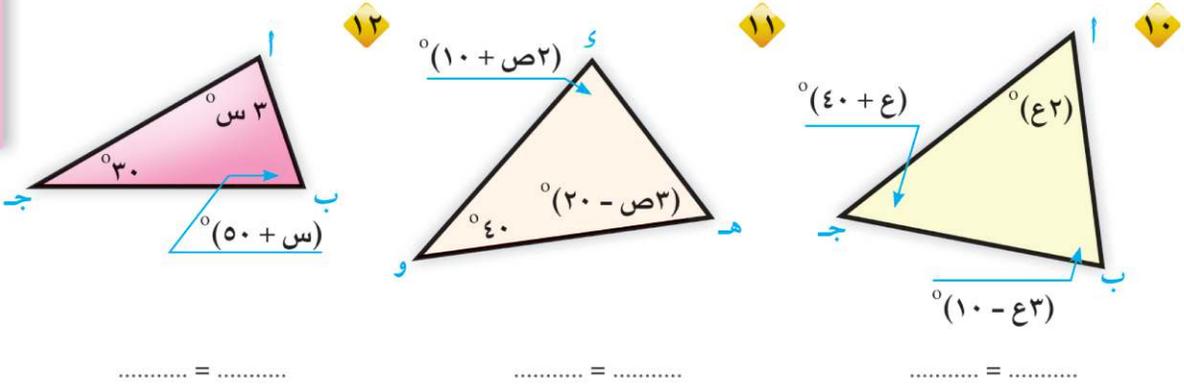


..... =



..... =



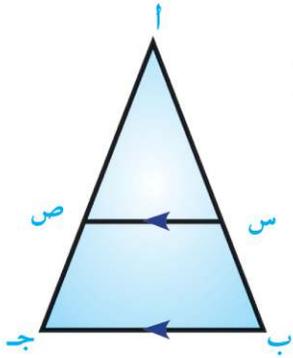


..... =

..... =

..... =

أمثلة



١ في الشكل المقابل: $\triangle ABC$ فيه $AB = AC$ ، $AS \parallel BC$ ، $\angle A = 40^\circ$.

اثبت أن $\triangle ASB$ متساوي الساقين.

المعطيات: $AB = AC$ ، $AS \parallel BC$.

المطلوب: إثبات أن $AS = BS$.

البرهان: في $\triangle ABC$: $AB = AC$

(١) $\angle A = \angle C$ (زاوية متساوية في مثلث متساوي الساقين)

$\angle ASB = \angle ACS$ (زاوية متساوية في مثلث متساوي الساقين)

(٢) $\angle ASB = \angle ACS$ (زاوية متساوية في مثلث متساوي الساقين)

بالمثل: $\angle ASB = \angle ACS$ (زاوية متساوية في مثلث متساوي الساقين)

(٣) $\angle ASB = \angle ACS$ (زاوية متساوية في مثلث متساوي الساقين)

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن:

$\angle ASB = \angle ACS$ (زاوية متساوية في مثلث متساوي الساقين)

في $\triangle ASB$

$\angle ASB = \angle ACS$ (زاوية متساوية في مثلث متساوي الساقين)

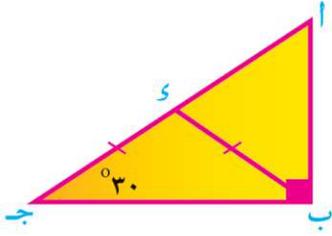
$AS = BS$.

وهو المطلوب

أي أن المثلث ASB متساوي الساقين

فكّر هل يمكن استنتاج أن $AS = BS$ ؟ فسر إجابتك.





٢ في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، و $(\triangle أ ب ج) = 30^\circ$ ،
 $س \in أج$ بحيث $ب س = س ج$

اثبت أن $\triangle أ ب س$ متساوي الأضلاع.

المعطيات: و $(\triangle أ ب ج) = 90^\circ$ ، و $(\triangle أ ب ج) = 30^\circ$ ، و $ب س = س ج$

المطلوب: إثبات أن $أ ب = ب س = س أ$

البرهان: في $\triangle أ ب ج$ $ب س = س ج$ \therefore و $ب س = س ج$

\therefore و $(\triangle أ ب س) = (\triangle أ ب ج)$ و $(\triangle أ ب ج) = 30^\circ$

في $\triangle أ ب ج$ \therefore و $(\triangle أ ب ج) = 90^\circ$ ، و $(\triangle أ ب س) = 30^\circ$

\therefore و $(\triangle أ ب س) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (١)

\therefore $\triangle أ ب س$ خارجة عن $\triangle أ ب ج$

\therefore و $(\triangle أ ب س) = (\triangle أ ب ج) + (\triangle أ ب ج)$ و $(\triangle أ ب س) = 60^\circ$

و $(\triangle أ ب س) = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ (٢)

في $\triangle أ ب س$ \therefore مجموع قياسات زوايا \triangle الداخلة = 180°

\therefore و $(\triangle أ ب س) = (60^\circ + 60^\circ) - 180^\circ = 60^\circ$ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) \therefore و $(\triangle أ ب س) = (\triangle أ ب س) = (\triangle أ ب س)$ و $(\triangle أ ب س) = 60^\circ$

أي أن $\triangle أ ب س \equiv \triangle أ ب س \equiv \triangle أ ب س$

\therefore المثلث $أ ب س$ متساوي الأضلاع **أي أن $أ ب = ب س = س أ$** .



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين

فكر وناقش

سوف تتعلم

نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين.

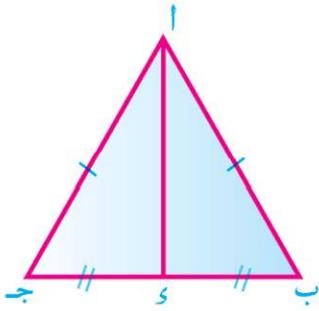
المصطلحات الأساسية

- مثلث متساوي الساقين.
- منصف زاوية الرأس.
- منصف قاعدة المثلث.
- محور تماثل القطعة المستقيمة.

نتيجة (١)



متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة



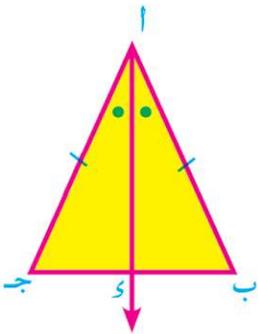
في الشكل المقابل
 \triangle أ ب ج فيه أ ب = أ ج ،
 أ س متوسط فيه ،
 فإن أ س ينصف \triangle ب أ ج ،
 أ س \perp ب ج ،

لاحظ أن: \triangle أ ب س \equiv \triangle أ ج س لماذا؟

نتيجة (٢)



منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها.



في الشكل المقابل:
 \triangle أ ب ج فيه أ ب = أ ج ،
 أ س ينصف \triangle ب أ ج ،
 فإن س منتصف ب ج ، أ س \perp ب ج ،
لاحظ أن: \triangle أ ب س \equiv \triangle أ ج س لماذا؟

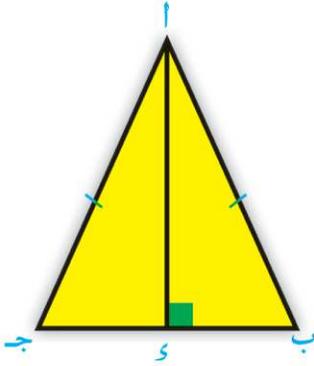


نتيجة (٣)



المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة وزاوية الرأس.

في الشكل المقابل:



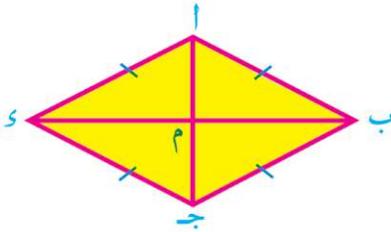
Δ أ ب ج فيه أ ب = أ ج ، $\overline{ا س} \perp \overline{ب ج}$

فإن $س$ تنصف $ب ج$ ، و $(\Delta ب ا س) = (\Delta ج ا س)$

لاحظ أن $\Delta ا س ب \equiv \Delta ا س ج$ لماذا؟



في الشكل المقابل:



أ ب ج د شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية في الطول.

هذا الشكل يسمى معين ، قطراه أ ج ، ب د

يتقاطعان في نقطة م.

لاحظ أن: $\Delta ا ب س \equiv \Delta ا ب د$ لماذا؟

$\therefore (\Delta ا ب س) = (\Delta ا ب د)$ و $(\Delta ج ب س)$

في $\Delta ا ب ج$ ، أ ب = ب ج ، $\overline{ب م}$ ينصف $\Delta ا ب ج$

$\therefore \overline{ب م} \perp \dots\dots\dots$ ، م منتصف أ ج

في $\Delta ب ا د$ ، أ ب = ا د ، $\overline{ا م} \perp \overline{ب د}$

$\therefore \overline{ا م}$ ينصف $\Delta \dots\dots\dots$ ، م منتصف ب د

هل قطرا المعين متعامدان؟

هل قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر؟

هل قطر المعين ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما؟ سجّل إجابتك .



محاور التماثل

أولاً: محور التماثل للمثلث المتساوي الساقين

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته.

في الشكل المقابل:

\triangle أ ب ج فيه أ ب = أ ج، $ا س \perp ب ج$

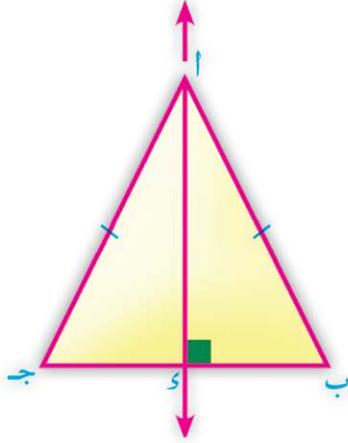
فإن $ا س$ هو محور تماثل للمثلث أ ب ج المتساوي الساقين.

ناقش:

هل يوجد للمثلث المتساوي الساقين أكثر من محور تماثل؟

كم عدد محاور التماثل في المثلث المتساوي الأضلاع؟

هل توجد للمثلث المختلف الأضلاع محاور تماثل؟



ثانياً: محور تماثل القطعة المستقيمة:

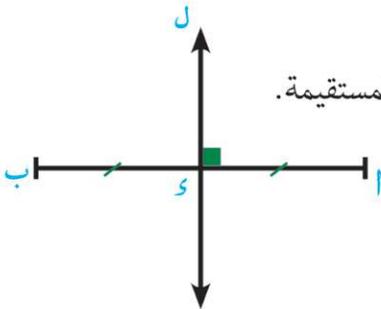
يسمى المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها

محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة وللإختصار يسمى محور القطعة المستقيمة.

في الشكل المقابل:

إذا كانت $س$ منتصف أ ب ، المستقيم $ل \perp ا ب$ حيث $س \in ل$

فإن المستقيم $ل$ هو محور أ ب



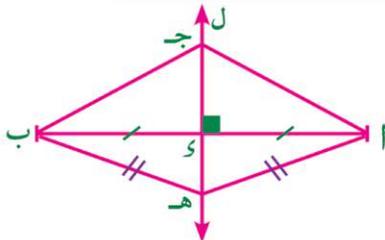
خاصية هامة

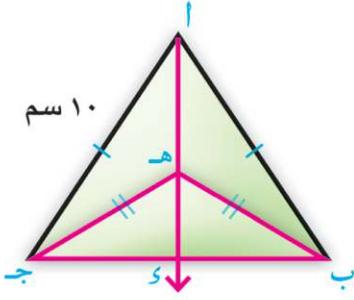
أي نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.

لاحظ أن:

١ إذا كانت ج $\in ل$ فإن أ ج = ب ج

٢ إذا كان ه = أ = ه ب فإن ه $\in ل$ لماذا؟





مثال

١ في الشكل المقابل

أب = أ ج = ١٠ سم ، هـ ب = هـ ج
أ هـ ∩ ب ج = {ي}

فإذا كان ب ج = ٦ سم، أوجد طول كل من ج ي ، أ ي

المعطيات: أب = أ ج، هـ ب = هـ ج

المطلوب: إيجاد ج ي، أ ي

البرهان: ∴ أب = أ ج ∴ اتقع على محور ب ج

∴ هـ ب = هـ ج ∴ هـ تقع على محور ب ج

∴ أ هـ هو محور ب ج

ويكون ي منتصف ب ج، أ ي ⊥ ب ج

∴ ي منتصف ب ج، ب ج = ٦ سم ∴ ج ي = ٣ سم

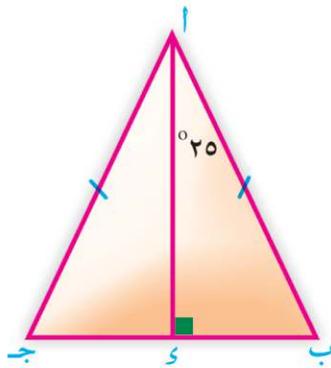
∴ أ ي ⊥ ب ج

∴ في Δ أ ي ج القائم الزاوية في ي

$$(أ ي)^2 = (أ ج)^2 - (ج ي)^2$$

$$(أ ي)^2 = ١٠٠ - ٩$$

$$∴ أ ي = \sqrt{٩١} \text{ سم}$$



٢ في الشكل المقابل

أب ج مثلث فيه أب = أ ج،

أ ي ⊥ ب ج، و (∠ ب أ ي) = ٢٥°،

ب ج = ٤ سم أوجد

ب طول جـ

أ و (∠ أ جـ)

الحل

المعطيات: أب = أ ج، أ ي ⊥ ب ج، و (∠ ب أ ي) = ٢٥°، ب ج = ٤ سم

المطلوب: و (∠ أ جـ)، طول جـ.



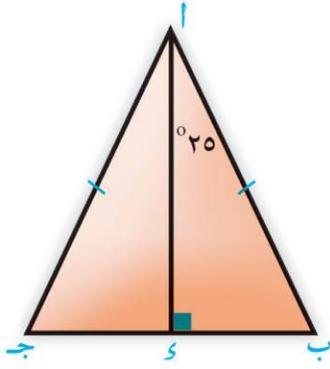
البرهان : في \triangle أ ب ج

$$\overline{أ ب} = \overline{أ ج} ، \overline{أ ك} \perp \overline{ب ج}$$

$\therefore \overline{أ ك}$ ينصف القاعدة $\overline{ب ج}$ وينصف \triangle ب أ ج

$$\therefore \angle (أ ج و) = \angle (أ ب و) = ٢٥^\circ$$

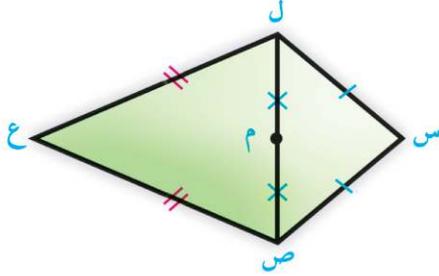
$$\angle ج = \frac{1}{2} \angle ب ج = \frac{٤}{٢} = ٢ \text{ سم}$$



١ في الشكل المقابل

$$ص س = ل س ، ع ص = ع ل ، ل م = ص م$$

أثبت أن س ، م ، ع على استقامة واحدة.



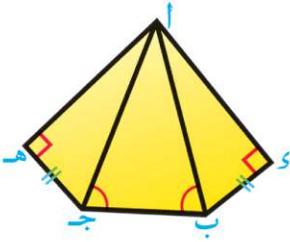
٢ في الشكل المقابل:

$$ب ج = ج ه$$

$$\angle (أ ب ج) = \angle (أ ج ب)$$

$$\angle (أ ج و) = \angle (أ ه و) = ٩٠^\circ$$

برهن أن: $\angle (أ ب و) = \angle (أ ج ه)$



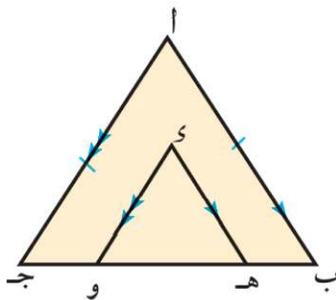
٣ في الشكل المقابل:

$$\overline{أ ب} = \overline{أ ج} ، \overline{أ ه} \parallel \overline{أ ب}$$

$$\overline{أ ج} \parallel \overline{أ ه}$$

اثبت: أولاً: $\angle ه = \angle و$

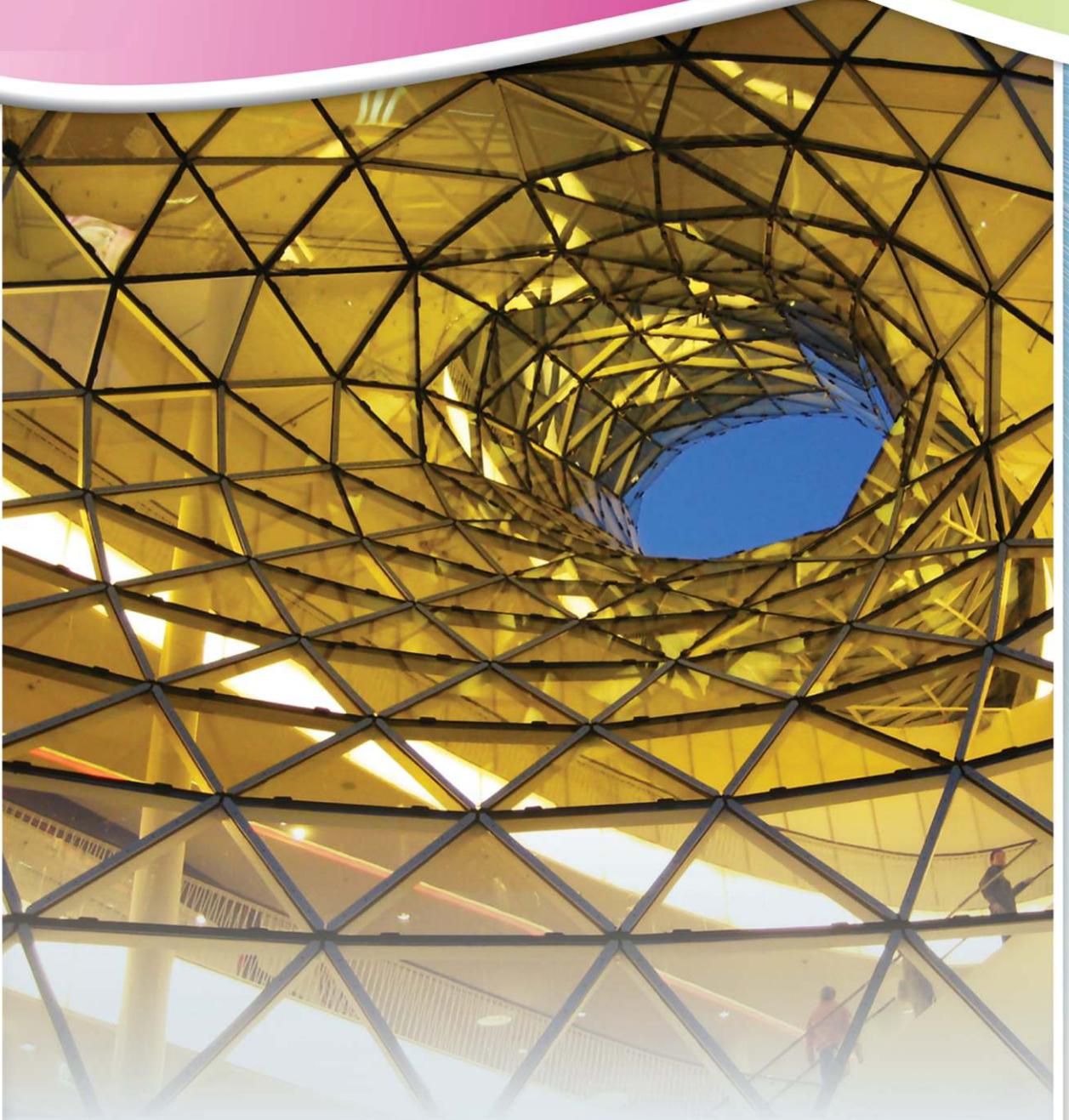
ثانياً: $\angle (أ ب و) = \angle (أ ه و)$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



التباين



فكر وناقش

مفهوم التباين

- ١ هل جميع تلاميذ فصلك لهم نفس الطول؟
- ٢ هل هناك اختلاف بين قياس الزاوية الحادة والزاوية القائمة والزاوية المنفرجة؟

ماذا يعني هذا الاختلاف؟

لاحظ أن:

التباين يعني وجود اختلاف في أطوال التلاميذ، وفي قياسات الزوايا، ويعبر عنه بعلاقة التباين، والتي تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين.

سوف تتعلم

- ☞ مفهوم التباين.
- ☞ مسلمات التباين.

المصطلحات الأساسية

- ☞ تباين
- ☞ مسلمة
- ☞ أكبر من <
- ☞ أصغر من >
- ☞ يساوي =

أمثلة



- ١ إذا كانت: \triangle أ ب ج حادة فإن: \angle أ ب ج $> 90^\circ$.

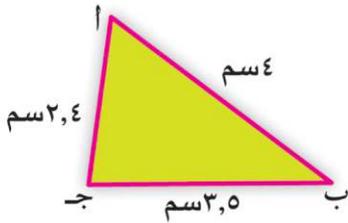
- ٢ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث فيه

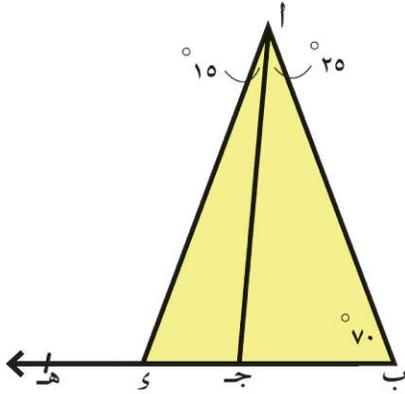
$$أ ب = ٤ \text{ سم، ب ج} = ٣,٥ \text{ سم،}$$

$$أ ج = ٢,٤ \text{ سم}$$

فإن: أ ب < ب ج ، ب ج < أ ج

أي أن أ ب < ب ج < أ ج



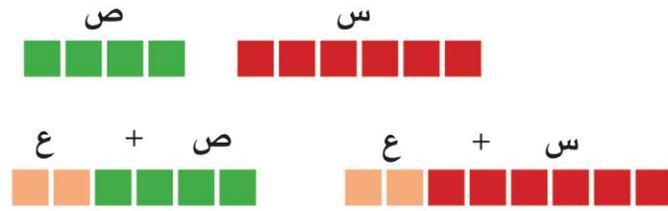


فى الشكل المقابل أوجد: \triangle أ ج ب ، و \triangle أ ج د ، و \triangle أ ج هـ ، و \triangle أ هـ ثم أكمل باستخدام < أو > :
 \triangle أ هـ و \triangle ج أ د و \triangle أ ج ب
 \triangle أ ج د و \triangle أ ج هـ و \triangle أ ب ج
 \triangle أ ج د و \triangle أ ج هـ و \triangle أ هـ

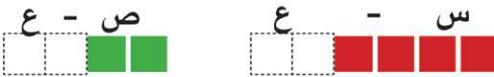
لاحظ أن: جميع العلاقات السابقة تسمى متباينات.

مسلمات التباين

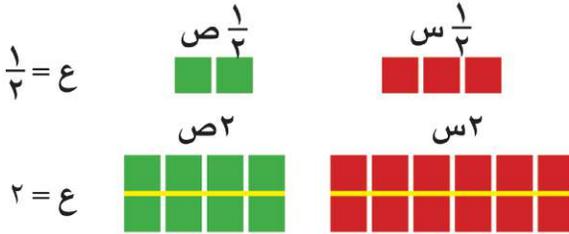
لأى ثلاثة أعداد س ، ص ، ع:



١ إذا كان: $س < ص$
 فإن: $س + ع < ص + ع$



٢ إذا كان: $س < ص$
 فإن: $س - ع < ص - ع$



٣ إذا كان: $س < ص$ ، ع عددًا موجبًا
 فإن: $س ع < ص ع$



٤ إذا كان: $س < ص$ ، $ص < ع$
 فإن: $س < ع$



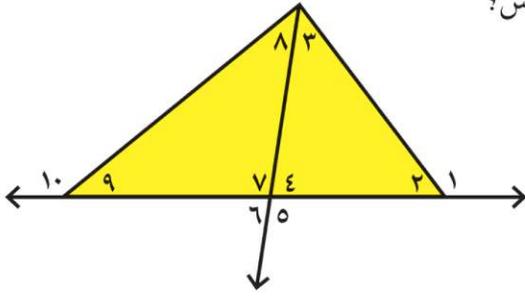
٥ إذا كان: $س < ص$ ، $أ < ب$
 فإن: $س + أ < ص + ب$



تذكر أن: قياس أي زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلية ماعدا المجاورة لها.

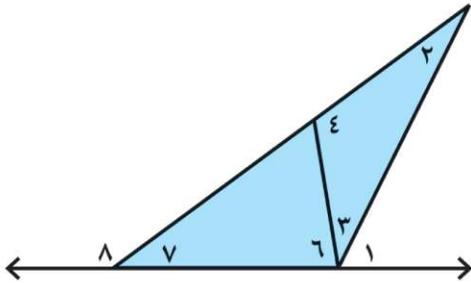


١ في الشكل المقابل: أي من الزوايا التالية لها أكبر قياس؟



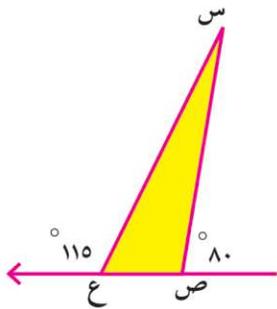
- أ $\triangle 1$ ، $\triangle 3$ ، $\triangle 4$
 ب $\triangle 4$ ، $\triangle 8$ ، $\triangle 9$
 ج $\triangle 2$ ، $\triangle 3$ ، $\triangle 7$
 د $\triangle 7$ ، $\triangle 8$ ، $\triangle 10$

٢ في الشكل المقابل عين:

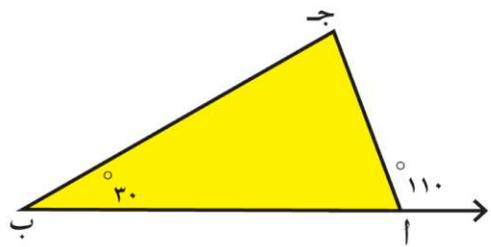


- أ جميع الزوايا التي قياسها أقل من $(\triangle 1)$
 ب جميع الزوايا التي قياسها أكبر من $(\triangle 6)$
 ج جميع الزوايا التي قياسها أقل من $(\triangle 4)$

٣ رتب قياسات زوايا المثلث أ ب ج تصاعدياً، قياسات زوايا المثلث س ص ع تنازلياً.



و $(\triangle \dots) < (\triangle \dots) < (\triangle \dots)$



و $(\triangle \dots) > (\triangle \dots) > (\triangle \dots)$

٤ في الشكل المقابل: ج \exists أ ب ، و \exists أ ب



فإن: أ ج ب و
 فإذا كان: أ ب < ج د





مثال

في الشكل المقابل:

و (\triangle أ ج ب) < و (\triangle أ ب ج) ، \angle ب = \angle ج

اثبت أن: و (\triangle أ ج ب) < و (\triangle أ ب ج)

المعطيات: و (\triangle أ ج ب) < و (\triangle أ ب ج) ، \angle ب = \angle ج

المطلوب: إثبات أن: و (\triangle أ ج ب) < و (\triangle أ ب ج)

البرهان: \angle ب = \angle ج

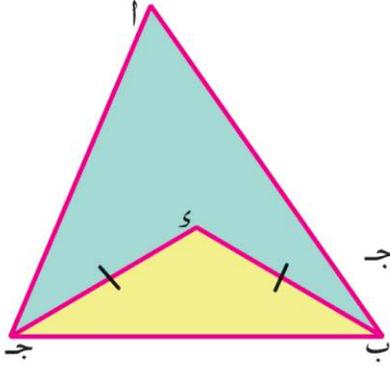
(١) \therefore و (\triangle ب ج د) = و (\triangle ب ج د)

(٢) \therefore و (\triangle أ ج ب) < و (\triangle أ ب ج)

\therefore بطرح (١) من (٢) ينتج أن:

و (\triangle أ ج ب) - و (\triangle ب ج د) < و (\triangle أ ب ج) - و (\triangle ب ج د)

\therefore و (\triangle أ ج ب) < و (\triangle أ ب ج) وهو المطلوب



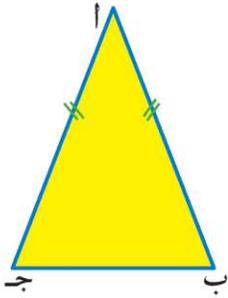
لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث

فكر وناقش

نشاط



١ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه $أب = أ ج$

عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس ج،

ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين ب، جـ المقابلتين للضلعين أ جـ، أ ب المتساويين في الطول؟

عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأسين أ، جـ، ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين المقابلتين للضلعين ب جـ، أ ب المختلفين في الطول؟

هل اختلاف طول الضلعين في المثلث يؤدي إلى اختلاف قياسا الزاويتين المقابلتين لهما؟

٢ ارسم المثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع.

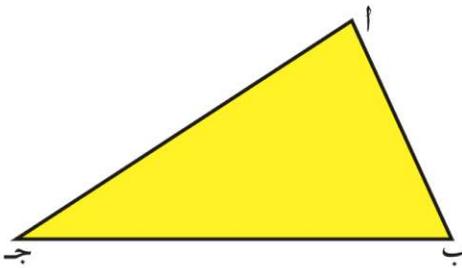
إطوى المثلث بحيث ينطبق

الرأس أ على الرأس ب ماذا

تلاحظ على قياس الزاويتين أ،

ب المقابلتين للضلعين ب جـ،

أ جـ المختلفين في الطول؟



كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ ماذا تلاحظ؟

هل يوجد في هذا المثلث زوايا متساوية في القياس؟

سوف تتعلم

المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث.

المصطلحات الأساسية

زاوية.

قياس زاوية.

أكبر زاوية في مثلث.

أصغر زاوية في مثلث.

أكبر ضلع في مثلث.

أصغر ضلع في مثلث.



لاحظ أن: إذا اختلفت أطوال أضلاع المثلث تختلف قياسات زواياه المقابلة لهذه الأضلاع.



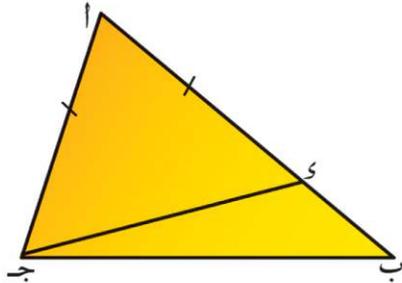
ارسم المثلث أ ب ج مختلف الأضلاع ثم قس أطوال أضلاعه الثلاثة ، وقياسات زواياه المناظرة ثم أكمل الجدول التالي:

أطوال الأضلاع	قياسات الزوايا المقابلة
أ ب = سم	و (\angle ج) = °
ب ج = سم	و (\angle أ) = °
ج أ = سم	و (\angle ب) = °

ماذا تلاحظ؟

نظرية (٣)

إذا اختلف طولاً ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول يقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر.



المعطيات: Δ أ ب ج فيه أ ب < أ ج

المطلوب: إثبات أن: و (\angle أ ج ب) < و (\angle أ ب ج)

العمل: نأخذ \exists أ ب بحيث أ ب = أ ج

البرهان: Δ أ ج ب فيه أ ب = أ ج

(١) \therefore و (\angle أ ج ب) = و (\angle أ ب ج)

\therefore Δ أ ب ج خارجة عن Δ أ ج ب و ج

(٢) \therefore و (\angle أ ب ج) < و (\angle أ ج ب)

من (١)، (٢) نستنتج أن

و (\angle أ ج ب) < و (\angle أ ب ج)

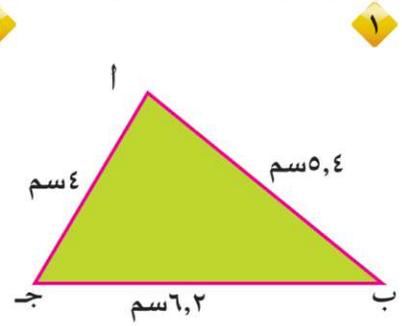
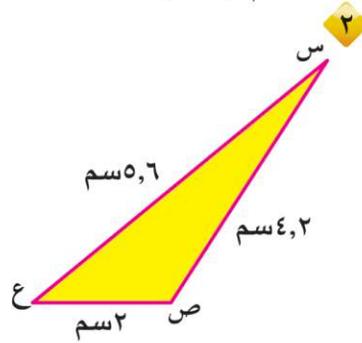
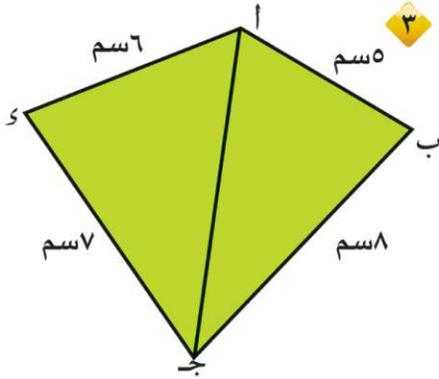
فيكون و (\angle أ ج ب) < و (\angle أ ب ج)

\therefore و (\angle أ ج ب) < و (\angle أ ب ج) وهو المطلوب.



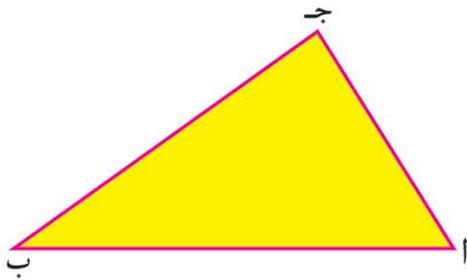


في كل من الأشكال التالية اكمل باستخدام ($>$ ، $<$)



و (أ) و (ب) | و (أ) و (ب) | و (أ) و (ب)
 و (أ) و (ج) | و (أ) و (ج) | و (أ) و (ج)
 و (ب) و (ج) | و (ب) و (ج) | و (ب) و (ج)

لاحظ أن: قياس أكبر زاوية في المثلث $< 60^\circ$
 قياس أصغر زاوية في المثلث $> 60^\circ$ لماذا؟



في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث فيه أ ب < ب ج < ج أ

برهن أن: و (أ) < و (ب) | و (أ) < و (ب) | و (أ) < و (ب)

المعطيات: أ ب < ب ج < ج أ

المطلوب: إثبات أن و (أ) < و (ب) | و (أ) < و (ب) | و (أ) < و (ب)

البرهان: في Δ أ ب ج

(١) \therefore أ ب < ب ج \therefore و (أ) < و (ب)

(٢) \therefore ب ج < ج أ \therefore و (ب) < و (ج)

من (١)، (٢) وباستخدام مسلمات التباين ينتج أن:

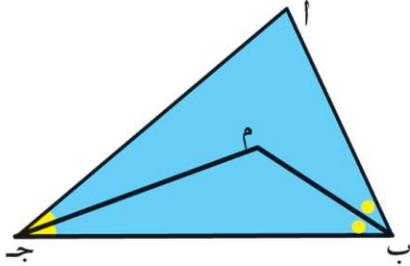
و (أ) < و (ب) | و (أ) < و (ب) | و (أ) < و (ب)



تذكر أن: أكبر أضلاع المثلث طولاً يقابل أكبر زوايا المثلث في القياس وأصغر أضلاع المثلث طولاً يقابل أصغر زوايا المثلث في القياس.



مثال



في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث، ب م ينصف \triangle أ ب ج، ج م ينصف \triangle أ ج ب
فإذا كان: م ج < م ب

برهن أن: و (\triangle أ ب ج) < و (\triangle أ ج ب)

المعطيات: ب م ينصف \triangle أ ب ج، ج م ينصف \triangle أ ج ب ، م ج < م ب .

المطلوب: إثبات أن و (\triangle أ ب ج) < و (\triangle أ ج ب)

البرهان: في \triangle م ب ج

\therefore م ج < م ب

في \triangle أ ب ج

(١) \therefore و (\triangle م ب ج) < و (\triangle م ج ب)

(٢) \therefore ب م ينصف \triangle أ ب ج \therefore و (\triangle م ب ج) = $\frac{1}{2}$ و (\triangle أ ب ج)

(٣) \therefore ج م ينصف \triangle أ ج ب \therefore و (\triangle م ج ب) = $\frac{1}{2}$ و (\triangle أ ج ب)

\therefore من (١)، (٢)، (٣): $\frac{1}{2}$ و (\triangle أ ب ج) < $\frac{1}{2}$ و (\triangle أ ج ب) من مسلمات التباين

\therefore و (\triangle أ ب ج) < و (\triangle أ ج ب) وهو المطلوب



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

فكر وناقش

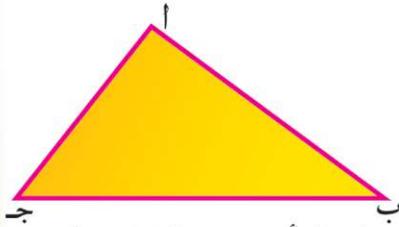
سوف تتعلم

المقارنة بين أطوال الأضلاع في مثلث.

المصطلحات الأساسية

- أطول ضلع في مثلث.
- أصغر ضلع في مثلث.
- أكبر زاوية في مثلث.
- أصغر زاوية في مثلث.
- قطعة مستقيمة عمودية.

نشاط 1 في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث زواياه مختلفة في القياس.



اطو المثلث بحيث ينطبق الرأس أ على الرأس ب. ماذا تلاحظ على طولي الضلعين ب ج ، أ ج المقابلين للزاويتين أ، ب المختلفتين في القياس؟

كرّر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس ج، ماذا تلاحظ؟

عندما ينطبق الرأس ج على الرأس أ، ماذا تلاحظ؟

هل يوجد في هذا المثلث أضلاع متساوية في الطول؟

لاحظ أن: إذا اختلفت قياسات زوايا المثلث تختلف أطوال أضلاعه المقابلة لهذه الزوايا.

نشاط 2 ارسم المثلث أ ب ج بحيث تكون زواياه مختلفة في القياس، ثم قس أطوال الأضلاع المقابلة وأكمل الجدول الآتي:

أطوال الأضلاع المقابلة له	قياسات الزوايا
ب ج = سم	∠(أ) = °
ج أ = سم	∠(ب) = °
أ ب = سم	∠(ج) = °

ماذا تلاحظ؟

هل أكبر زاوية في القياس يقابلها أكبر ضلع في الطول؟ وأصغر زاوية

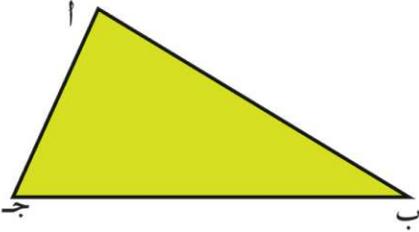
في القياس يقابلها أصغر ضلع في الطول؟

هل يمكن ترتيب أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً أو تنازلياً تبعاً لقياسات الزوايا المقابلة لها؟



نظرية (٤)

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأخبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى .



المعطيات: \triangle أ ب ج فيه $\angle ج < \angle ب$ و $\angle ب < \angle أ$

المطلوب: إثبات أن: $أب < أ ج$

البرهان: \therefore أ ب ، أ ج قطع مستقيمة

\therefore يجب أن تتحقق إحدى الحالات التالية:

(١) $أب > أ ج$ (٢) $أب = أ ج$ (٣) $أب < أ ج$

إذا لم تكن $أب < أ ج$

فإما $أب = أ ج$ أو $أب > أ ج$

إذا كان $أب = أ ج$ فإن $\angle ب = \angle ج$ و $\angle ب < \angle ج$ وهذا يخالف المعطيات

وإذا كان $أب > أ ج$ فإن $\angle ب > \angle ج$ و $\angle ب < \angle ج$ وهذا يخالف المعطيات

وإذا كان $أب < أ ج$ فإن $\angle ب < \angle ج$ و $\angle ب < \angle ج$ وهذا يخالف المعطيات

وإذا كان $أب < أ ج$ فإن $\angle ب < \angle ج$ و $\angle ب < \angle ج$ وهذا يخالف المعطيات

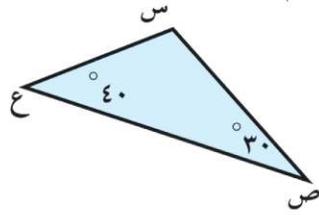
\therefore يجب أن يكون $أب < أ ج$

وهو المطلوب

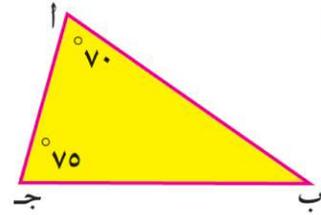




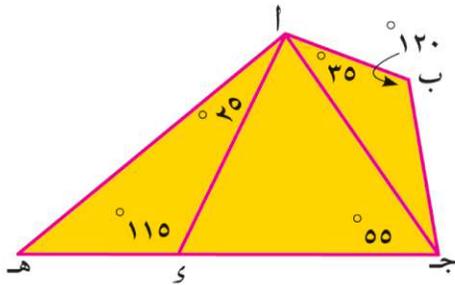
في الأشكال التالية أكمل باستخدام < أو > أو =



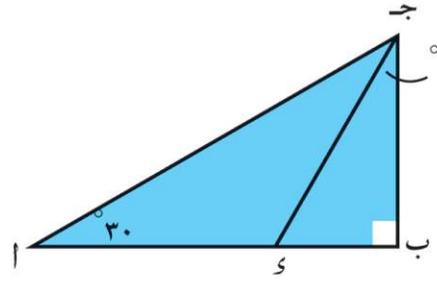
س ص س ع
ص ع س ص
ص ع س ع



أ ب أ ج
أ ب ب ج
أ ج ب ج



ب ج أ ب
ج د ج أ
أ د أ هـ
ج د أ د

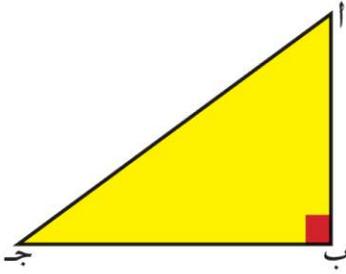


أ ج ب ج
ب ج س ب
أ ج ب د
ج د أ ج





في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث.



في الشكل المقابل: \triangle أ ب ج قائم الزاوية في ب.

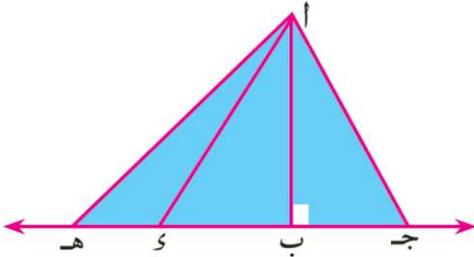
$\therefore \triangle$ أ ح د \therefore و $(\triangle ب) < (\triangle ا)$ \therefore

فيكون أ ج < ب ج

$\therefore \triangle$ ج ح د \therefore و $(\triangle ب) < (\triangle ج)$ \therefore

فيكون أ ج < أ ب

لاحظ أن في المثلث المنفرج الزاوية الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولاً.



هيا نفكر



أ ج < أ ب لماذا؟

أ ب < أ ج لماذا؟

أ هـ < أ ب لماذا؟

هل طول ضلع القائمة في المثلث القائم الزاوية أصغر من طول الوتر . لماذا؟

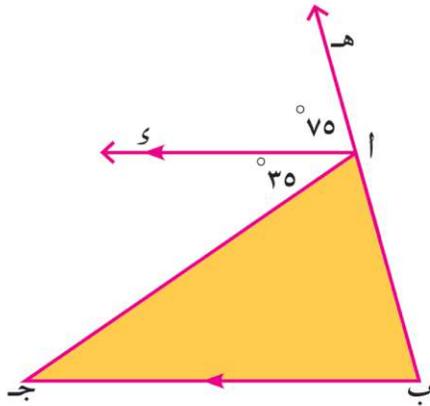


نتيجة (٢)



طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.

تعريف: بُعد أي نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم.



مثال



في الشكل المقابل: $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{AC} \perp \overline{AH}$ ، $\angle A = 70^\circ$ و $\angle C = 30^\circ$
 و $\angle A = 70^\circ$
 برهن أن: $\angle A < \angle B$

المعطيات: $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ، و $\angle A = 70^\circ$ ، و $\angle C = 30^\circ$

المطلوب: إثبات أن $\angle A < \angle B$

البرهان: $\because \overline{AC} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{AC} \perp \overline{AH}$ قاطع لهما

$\therefore \angle A = \angle B$ و $\angle A = 70^\circ$

$\because \overline{AC} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{AC} \perp \overline{AH}$ قاطع لهما

$\therefore \angle A = \angle B$ و $\angle C = 30^\circ$

من (١)، (٢) يكون:

في المثلث $\triangle ABC$

و $\angle A = 70^\circ$ ، و $\angle B = 30^\circ$

أي أن و $\angle A < \angle B$ و $\angle C = 30^\circ$

$\therefore \angle A < \angle B$

وهو المطلوب



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



سوف تتعلم

متباينة المثلث.

المصطلحات الأساسية

متباينة.

متباينة المثلث.

نشاط



باستخدام المسطرة المدرجة والفرجار، حاول رسم المثلث أ ب ج حيث:

١ أ ب = ٤ سم ، ب ج = ٥ سم ، أ ج = ٦ سم

٢ أ ب = ٦ سم ، ب ج = ٣ سم ، أ ج = ٢ سم

٣ أ ب = ٩ سم ، ب ج = ٤ سم ، أ ج = ٣ سم

٤ أ ب = ٨ سم ، ب ج = ٣ سم ، أ ج = ٥ سم

فى أى من الحالات السابقة أمكنك رسم المثلث، وماذا تستنتج؟

حقيقة: فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

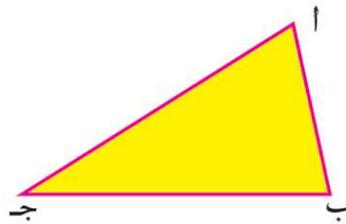
أى أن: فى أى مثلث أ ب ج يكون:

$$أ ب + ب ج < أ ج$$

$$ب ج + ج أ < أ ب$$

$$أ ب + أ ج < ب ج$$

فمثلاً: الأعداد ٩، ٣، ٥ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث؛ لأن مجموع أصغر عددين = ٣ + ٥ = ٨، ٨ > ٩ ولا تحقق متباينة المثلث.



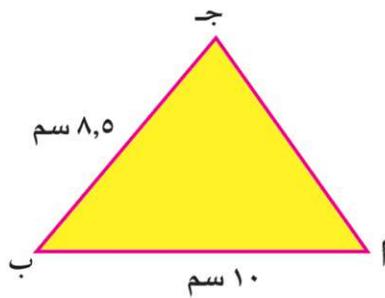
مثال



فى المثلث أ ب ج إذا كان أ ب = ١٠ سم،

$$ب ج = ٨,٥ سم$$

أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع أ ج.



الحل

- (١) $اج > اب + ب ج$ $\therefore اج > ١٨,٥$
 لكن $اج + ب ج < اب$ متباينة المثلث
 (٢) $اج < اب - ب ج$ $\therefore اج < ١,٥$
 من (١)، (٢) $١٨,٥ < اج < ١,٥$
 $\therefore اج \in [١,٥, ١٨,٥]$



أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما:

- أ ٦ سم، ٩ سم ب ٥ سم، ١٢ سم ج ٧ سم، ١٥ سم د $٢,٩$ سم، $٣,٢$ سم

الحل

أ: متباينة المثلث

تنص على أن: مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

\therefore الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث = $[٣, ١٥]$

لاحظ: لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ٣ سم (لماذا)

لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ١٥ سم (لماذا)



ناقش معلمك لإستكمال حلول

(ب) . (ج) . (د)

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني





جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
الإدارة العامة لشئون الكتب

الفصل الدراسي الثاني

المحتويات

الوحدة الأولى: التحليل

- ٢ الدرس الأول: تحليل المقدار الثلاثي
- ٦ الدرس الثاني: المقدار الثلاثي على صورة المربع الكامل
- ٩ الدرس الثالث: تحليل الفرق بين مربعين
- ١١ الدرس الرابع: تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما
- ١٣ الدرس الخامس: التحليل بالتقسيم
- ١٥ الدرس السادس: التحليل بإكمال المربع
- ١٧ الدرس السابع: حل المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد جبرياً

الوحدة الثانية: القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة في ح

- ٢١ الدرس الأول: القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة في ح
- ٢٣ الدرس الثاني: قوانين القوى الصحيحة غير السالبة في ح
- ٢٥ الدرس الثالث: قوانين القوى الصحيحة السالبة في ح
- ٢٧ الدرس الرابع: العمليات الحسابية باستخدام القوى الصحيحة

الوحدة الثالثة: الاحتمال

- ٣١ الدرس الأول: الاحتمال

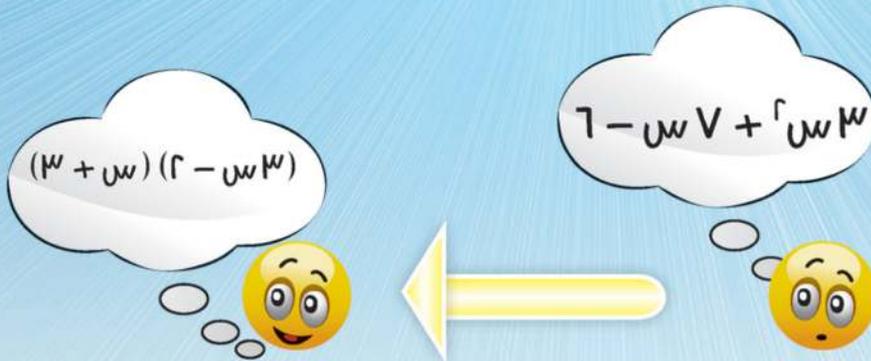
الوحدة الرابعة: المساحات

- ٣٨ الدرس الأول: تساوي مساحتي متوازي أضلاع
- ٤٣ الدرس الثاني: تساوي مساحتي مثلثين
- ٤٨ الدرس الثالث: مساحات بعض الأشكال الهندسية

الوحدة الخامسة: التشابه وعكس فيثاغورث وإقليدس

- ٥٣ الدرس الأول: التشابه
- ٥٦ الدرس الثاني: عكس نظرية فيثاغورث
- ٥٧ الدرس الثالث: المساقط
- ٦٠ الدرس الرابع: نظرية إقليدس
- ٦٢ الدرس الخامس: التعرف على نوع المثلث بالنسبة لزاويه

التحليل



$\begin{array}{cc} 7- & 7x \\ \swarrow & \searrow \\ x & 7 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 7 & 7x \\ \swarrow & \searrow \\ x- & 7 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 1- & 7x \\ \swarrow & \searrow \\ 7 & x \end{array}$	$\begin{array}{cc} 1 & 7x \\ \swarrow & \searrow \\ 7- & x \end{array}$
$\begin{array}{c} 7x = \\ \boxed{=} \\ x7 \end{array}$	$\begin{array}{c} 7x- = \\ \boxed{\neq} \\ x7 \end{array}$	$\begin{array}{c} 7x = \\ \boxed{\neq} \\ x7 \end{array}$	$\begin{array}{c} 7x- = \\ \boxed{\neq} \\ x7 \end{array}$

تحليل المقدار الثلاثي

فكر وناقش

سبق أن تعلمت أن:

تحليل أي عدد صحيح معناه تحويله إلى حاصل ضرب عاملين أو أكثر
مثلاً: $12 = 4 \times 3$ أو $12 = 3 \times 4$ أو $12 = 2 \times 6$ ، ...

سبق أن درسنا التحليل بإخراج العامل المشترك الأعلى (ع.م.أ)

مثلاً: $6س^2 - 9س^3 = 3س^2(2 - 3س)$



مثال

حلل بإخراج ع.م.أ:

٢ | $1 - (أ - ب) - (ب - أ)$

١ | $2س(3 + م) - 4ص(3 + م)$

الحل

أ. ع.م.أ = $2(3 + م)$

∴ المقدار = $2(3 + م)(س - 2ص)$

ب) المقدار = $(أ - ب) - (ب - أ)$

ع.م.أ = $(أ - ب)$

∴ المقدار = $(أ - ب)(ب + أ)$

نعلم أن: $(3 + س)(3 + س) = س(س + 4) + 3(س + 4)$

$= س^2 + 4س + 3س + 12$

$= س^2 + 7س + 12$

$= س^2 + 7س + 12$

∴ يسمّى المقدار $(س^2 + 7س + 12)$ مقدارًا ثلاثيًا.

سوف تتعلم

☞ معنى تحليل مقدار جبري.

☞ تحليل المقدار الثلاثي.

مصطلحات أساسية

☞ تحليل.

☞ مقدار جبري.

☞ مقدار ثلاثي.



المجموع	حاصل الضرب ١٢
١٣	١٢×١
١٣-	$١٢- \times ١-$
٨	٦×٢
٨-	$٦- \times ٢-$
٧	٤×٣
٧-	$٤- \times ٣-$

من خلال خطوات الضرب السابقة وباستخدام خواص عملية الضرب هل تستطيع تحليل المقدار $(س٧ + ١٢)$ إلى عاملين؟
أولاً: $س^٢$ تحلل إلى $س \times س$

ثانياً: نحاول البحث عن عددين حاصل ضربهما ١٢ ومجموعهما $٧ =$ وهما ٣، ٤
 $س٧ + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤)$

 **فكر وناقش :**

- ١ أوجد عددين حاصل ضربهما ٢٠ ومجموعهما ٩
٢ أوجد عددين حاصل ضربهما ١٢ ومجموعهما ٨-
٣ أوجد عددين حاصل ضربهما ٢٤- ومجموعهما ٥
٤ أوجد عددين حاصل ضربهما ١٥- ومجموعهما ١٤-

أولاً: تحليل المقدار الثلاثي على صورة $س^٢ + ب س + ج$

- يحلل هذا المقدار إلى عاملين.
 الحد الأول في كل منهما س .
 الحدان الآخران هما عددان حاصل ضربهما ج ومجموعهما ب .

 **أمثلة**

٢ **حلل المقدار: $س^٢ - ٥س - ٦$**

الحل

نبحث عن عددين حاصل ضربهما $٦-$ ومجموعهما $٥-$ وهما ١، $٦-$
 $س^٢ - ٥س - ٦ = (س + ١)(س - ٦)$

١ **حلل المقدار: $س^٢ - ٥س + ٦$**

الحل

نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٦ ومجموعهما $٥-$ وهما $٢-$ ، $٣-$
 $س^٢ - ٥س + ٦ = (س - ٢)(س - ٣)$



حلّ المقدار: $٣ص - ٤٨ + ١٨ص$

٣

الحل

- ١ يجب ترتيب حدود المقدار حسب قوى ص تنازلياً، فيكون المقدار $٣ص^٢ + ١٨ص - ٤٨$
- ٢ نلاحظ وجود عامل مشترك بين حدود المقدار وهو ٣، فيكون المقدار $٣(ص^٢ + ٦ص - ١٦)$
- ٣ نبحث عن عددين حاصل ضربهما -١٦ ومجموعهما ٦ وهما $-٨، ٢$ ،
∴ المقدار $= ٣(ص - ٢)(ص + ٨)$

حلّ المقدار: $٤م^٢ - ٦م^٢ن + ٥ن^٢$

٤

الحل

- ١ م^٤ تحلل إلى م^٢ × م^٢
- ٢ نبحث عن عددين حاصل ضربهما $(٥ن^٢)$ ومجموعهما $(-٦ن)$ وهما $-٥ن، -٢ن$ ،
المقدار $= (م - ٢ن)(٤م - ٥ن)$

ثانياً: تحليل المقدار الثلاثي على صورة $أس^٢ + ب + ج$ عندما $١ \neq ١$

$$(١٢-) + ((١٥س-) + ٨س) + ١٠س^٢ = (٤ + ٥س)(٣ - ٢س)$$

٤ × ٣- حاصل ضرب الطرفين + حاصل ضرب الوسطين

نعلم أن:

$$١٢ - ٧س - ١٠س^٢ = (٤ + ٥س)(٣ - ٢س)$$

وبالعكس لتحليل المقدار الثلاثي $١٢ - ٧س - ١٠س^٢$ نجري عدة محاولات للوصول إلى التحليل الصحيح، ويمكن الاستعانة بالشكل المقابل.

$$\text{الحد الأوسط} = ٢س \times ٤ + (٣-) \times ٥س$$

$$= ٧س -$$

$$\therefore ١٠س^٢ - ٧س - ١٢ = (٣ - ٢س)(٤ + ٥س)$$

مثال ١ حلّ المقدار $٦ - ٧س + ٣س^٢$

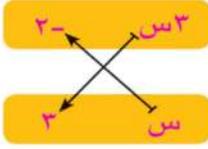


الحل

نلاحظ أن $٣س^٢ = ٣س \times س$ بينما $(٦-)$ تحلل إلى $١ \times (٦-)$ أو $(١-) \times ٦$ أو $٢ \times (٣-)$ أو $(٣-) \times ٢$ ونلاحظ المحاولات الآتية للوصول إلى الحل الصحيح:



الوحدة الأولى الدرس الأول



شكل (٤)



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

في شكل (١): $3s(1-) = 1 \times s + 6- \times 3s$ الحد الأوسط \neq

في شكل (٢): $3s(1-) = 6- \times s + 1 \times 3s$ الحد الأوسط \neq

في شكل (٣): $3s(2-) = 2 \times s + 3- \times 3s$ الحد الأوسط \neq

في شكل (٤): $3s(2-) = 3 \times s + 6- \times 3s$ الحد الأوسط $=$

$$\therefore 3s(2-) = 6- + 3s(3s)$$

مثال ٢



حلّل المقدار $15s^2 - 21s - 6s^2$

الحل

١ المقدار بعد ترتيبه، هو: $15s^2 - 6s^2 - 21s$ نلاحظ وجود ٣ عامل مشترك أعلى.

$$\therefore \text{المقدار} = 3(5s^2 - 2s^2 - 7s)$$

٢ الحد الثالث سالبًا. \therefore إشارتا عاملي العدد $7-$ مختلفتان.

$$\therefore \text{المقدار} = 3(5s^2 - 7s)(s + 1)$$



مثال (٣)



حلّل المقدار $6m^2 + n(2 - 7m)$

الحل

$$\text{المقدار} = 6m^2 + 2n - 7mn = 6m^2 - 7mn + 2n$$

$$= (6m - 7n)(n) = (3 - 7m)(2n)$$

لاحظ أن: يمكن التحقق من صحة الحل بضرب القوسين بمجرد النظر للحصول

على المقدار الأصلي قبل التحليل.

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الوحدة الأولى

الدرس الثاني

تحليل المقدار الثلاثي على صورة المربع الكامل

فكر وناقش

سبق ان تعلمت ان:

$$\begin{aligned} 9 + 12س + 4س^2 &= (3 + 2س)^2 \\ 25ص + 70س + 49س^2 &= (5ص + 7س)^2 \\ 25م + 10ل + 4س^2 &= (5م + 2ل)^2 \end{aligned}$$

تسمى كل من المقادير $4س^2 - 12س + 9$ ، $49س^2 + 70س + 25ص$ ، $4س^2 + 10ل + 25م$ مربعاً كاملاً

ونلاحظ أن

- 1 كلاً من الحدين الأول والثالث مربع كامل.
- 2 الحد الأوسط = $\pm 2 \times$ الجذر التربيعي للحد الأول \times الجذر التربيعي للحد الثالث ويكون تحليل المقدار الثلاثي المربع الكامل على الصورة:

$$\begin{aligned} &= \text{المقدار الثلاثي المربع الكامل} \\ &= (\sqrt{\text{الحد الأول}} \pm \sqrt{\text{الحد الثالث}})^2 \\ &\quad \text{إشارة الحد الأوسط} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مثلاً: } 9س^2 + 30س + 25 &= (3س + 5)^2 \\ 4س^2 + 14ل + 25م &= (2س + 5م)^2 \end{aligned}$$

لاحظ:

- 1 إخراج العامل المشترك الأعلى بين حدود المقدار إن وجد.
- 2 ترتيب حدود المقدار تنازلياً حسب قوى أحد الرموز.

سوف تتعلم

تحليل المقدار الثلاثي على صورة المربع الكامل.

مصطلحات أساسية

مربع كامل.



مثال ١



بين أيًا من المقادير الآتية يكون مربعًا كاملاً، ثم حلّ المقدار الذي على صورة مربع كامل:

أ $٢٥س^٢ - ٣٠س + ٩$ ب $٢م + ٤م - ٤$ ج $٤٩أ + ٧٠أب + ٢٥ب^٢$

الحل

أ $٢٥س^٢ = (٥س)^٢$ ، $٩ = (٣)^٢$ كل من الحدين الأول والثالث مربع كامل

$$٢ \times ٥ \times ٣ = ٣٠ = \text{الحد الأوسط}$$

∴ المقدار $٢٥س^٢ - ٣٠س + ٩$ مربع كامل ويكون المقدار $= (٥س - ٣)^٢$

ب المقدار $٢م + ٤م - ٤$ ليس مربعًا كاملاً لأن الحد الثالث سالب.

ج الحد الأول $٤٩ = (٧)^٢$ مربع كامل ، الحد الثالث $٢٥ = (٥)^٢$ مربع كامل

$$٧ \times ٥ \times ٢ = ٧٠ = \text{الحد الأوسط}$$

∴ المقدار $٤٩أ + ٧٠أب + ٢٥ب^٢$ مربع كامل، ويكون المقدار $= (٧أ + ٥ب)^٢$

مثال ٢



أكمل الحدّ الناقص في كلّ من المقادير الآتية ليكون المقدار مربعًا كاملاً ثم حلّ المقدار.

أ $٤ص^٢ + + ١٢١$ ب $٢٥أ - ٣٠أب +$

الحل

أ الحدّ الأوسط $= ٢ \pm (\sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}) = ٢ \pm (٥ \times ١١) = ٢ \pm ٥٥$

∴ المقدار $= ٤ص^٢ \pm ٥٥ص + ١٢١$ ويكون المقدار $= (٥ص \pm ١١)^٢$

ب $٢٥ = (٥)^٢$

الحدّ الأوسط $= ٣٠ = ٥ \times ٢ \times \text{الجزء التربيعي للحد الثالث}$

$$\text{الجزء التربيعي للحد الثالث} = \frac{٣٠}{٥ \times ٢} = ٣$$

الحد الثالث $= (٣)^٢ = ٩$

∴ المقدار $= ٢٥ - ٣٠أب + ٩ب^٢$ ويكون المقدار $= (٥ - ٣ب)^٢$



مثال ٣

استخدم التحليل لتسهيل حساب قيمة: $^2(2,7) + 2,7 \times 7,3 \times 2 + ^2(7,3)$

الحل

نلاحظ أن المقدار المعطى على صورة مقدار ثلاثي مربع كامل، ولذلك يمكن كتابته بالصورة

$$\text{المقدار} = ^2(2,7 + 7,3) = ^2(10) = 100$$

مثال ٤

حل كل من المقادير الآتية:

أ $س^3 + ٥س^2 + ١٢٥س$ ب $٤٠س^2 - ١٥٠س - ٨س^٢$ ج $٢ص^٢ + ٢٤ص + ٦ص^٢$

الحل

أ بإخراج ع.م.أ

$$\therefore \text{المقدار} = ٥س(س^٢ + ١٠س + ٢٥) = ٥س(س + ٥)^٢$$

وبترتيب المقدار حسب قوى التنازلية

ب المقدار $= ٢(٢٠س^٢ - ١٢٥س - ٤س^٢)$

$$= ٢(-١٢٥س - ٢٠س^٢ + ٤س^٢)$$

$$= ٢(-١٥س - ٢س^٢)$$

ج المقدار $= ٦ص(٤ + ٢ص + ٤ص + ٢ص^٢)$ وبترتيب المقدار حسب قوى س التنازلية

$$= ٦ص(٤ + ٢ص + ٤ص + ٢ص^٢)$$

$$= ٦ص(٢ + ٢ص)^٢$$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



فكر وناقش

سوف تتعلم

تحليل الفرق بين مربعين.

مصطلحات أساسية

الفرق بين مربعين.

سبق أن تعلمت أن:

$$(س + ص)(س - ص) = س^2 - ص^2$$

يسمى المقدار $س^2 - ص^2$ فرقاً بين مربعين

الفرق بين مربعين = مجموع الكميّتين × الفرق بينهما.

$$س^2 - ص^2 = (س + ص)(س - ص)$$

مثال ١



حلّ كلًّا من المقادير الآتية:

ب $١ - ٢(٣ - ص)$

أ $٢٥ - ٢س٤٩$

د $٢(س + ص) - ٢(س - ص)$

ج $٢٧م^٢ - ٤٨م ن^٦$

الحل

أ $٢٥ - ٢س٤٩ = (٥ + س٧)(٥ - س٧)$

ب $١ - ٢(٣ - ص) = [١ + (٣ - ص)] [١ - (٣ - ص)]$

$(٤ - ص٢)(٢ - ص٢) =$

$٢(١ - ص) × ٢(٢ - ص) = ٤(١ - ص)(٢ - ص)$

ج $٢٧م^٢ - ٤٨م ن^٦ = ٣م(٩م - ١٦ن^٦)$

$٣م(٣م + ٤ن^٦)(٣م - ٤ن^٦) =$

د $٢(س + ص) - ٢(س - ص) = [(س + ص) + (س - ص)] [(س + ص) - (س - ص)]$

$٢س × ٢ص =$

$٤س ص =$



أمثلة



٢ استخدم التَّحليلَ لتسهيل إيجاد قيمة كلِّ من:

أ ${}^2(763) - {}^2(237)$ ب $1 - {}^2(999)$

الحل

أ المقدار ${}^2(237 + 763) (237 - 763) = 526000 = 526 \times 1000$

ب المقدار ${}^2(1 + 999) (1 - 999) = 998000 = 998 \times 1000$

٣ حلُّ المقدار $81س - 16ص$

الحل

$81س - 16ص = (9س + 4ص) (9س - 4ص)$

$= (9س + 4ص) (9س - 4ص)$

٤ استخدم التحليل في إيجاد ناتج المقدار:

$2 \times (23, 82) - 2 \times (26, 18)$

الحل

المقدار $2 [{}^2(23, 82) - {}^2(26, 18)]$

$2 (23, 82 + 26, 18) (23, 82 - 26, 18) =$

$2 (50) (2, 36) =$

$236 = 2, 36 \times 100 =$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



تحليل مجموع المكعبين والفرق بينهما

فكر وناقش

سوف تتعلم

- تحليل مجموع المكعبين .
- تحليل الفرق بين مكعبين .

مصطلحات أساسية

- مجموع مكعبين .
- الفرق بين مكعبين .

$$\begin{array}{r}
 \text{س}^3 - \text{س}^2 + \text{س} + \text{س}^2 \\
 \underline{+ \text{س}^3 + \text{س}^2} \\
 \text{س}^3 + \text{س}^2 + \text{س} + \text{س}^2 \\
 \underline{- \text{س}^3 + \text{س}^2} \\
 \text{س}^2 + \text{س} + \text{س}^2 \\
 \underline{- \text{س}^2 + \text{س}^2} \\
 \text{س} + \text{س}^2 \\
 \underline{- \text{س} + \text{س}^2} \\
 \text{س}^2 + \text{س}^2 \\
 \dots\dots
 \end{array}$$

تحليل مجموع المكعبين

سأل المعلم الطالب: هل نستطيع تحليل $\text{س}^3 + \text{س}^2$ ؟

فكر الطالب وأجاب: أتوقع أن يكون أحد العاملين $(\text{س} + \text{س})$

قال المعلم: هل يمكنك معرفة العامل الآخر في $\text{س}^3 + \text{س}^2$ ؟

أجاب الطالب: لمعرفة العامل الآخر في $\text{س}^3 + \text{س}^2$

نقسم $(\text{س}^3 + \text{س}^2) \div (\text{س} + \text{س})$ باستخدام القسمة المطولة السابق دراستها.

ويكون خارج القسمة $\text{س}^2 - \text{س} + \text{س}$

المقدار $\text{س}^3 + \text{س}^2$ يسمى **مجموع مكعبين** ويحلل كالاتي:

$$(\text{س}^3 + \text{س}^2) = (\text{س} + \text{س})(\text{س}^2 - \text{س} + \text{س})$$

مثلاً:

$$(\text{س}^3 + \text{س}^2) = (\text{س} + \text{س})(\text{س}^2 - \text{س} + \text{س}) = (\text{س} + \text{س})(\text{س}^2 - \text{س} + \text{س}) = (\text{س} + \text{س})(\text{س}^2 - \text{س} + \text{س})$$

$$= (\text{س} + \text{س})(\text{س}^2 - \text{س} + \text{س}) = (\text{س} + \text{س})(\text{س}^2 - \text{س} + \text{س})$$

تحليل الفرق بين المكعبين

المقدار $\text{س}^3 - \text{س}^2$ يسمى **فرقاً بين مكعبين**، ويمكن استنتاج تحليله:

$$\text{س}^3 - \text{س}^2 = (\text{س} - \text{س})(\text{س}^2 + \text{س} + \text{س})$$

$$= (\text{س} - \text{س})(\text{س}^2 + \text{س} + \text{س}) = (\text{س} - \text{س})(\text{س}^2 + \text{س} + \text{س})$$

$$\therefore \text{س}^3 - \text{س}^2 = (\text{س} - \text{س})(\text{س}^2 + \text{س} + \text{س})$$



التحليل بالتقسيم.

مصطلحات أساسية

التحليل بالتقسيم.

لتحليل مقدارٍ جبريٍّ مكونٍ من أكثر من ثلاثة حدودٍ مثل:

$$2اس + اص + 2ب س + ب ص$$

نلاحظُ عدمَ وجود عاملٍ مشتركٍ بين جميع حدوده، وأنه ليس على إحدى الصور السابقة، ولذلك نحاولُ تقسيمه إلى مجموعتين بين كلٍّ منها عاملٌ مشتركٌ.

$$\text{المقدار} = 2اس + اص + 2ب س + ب ص$$

$$= (2اس + اص) + (2ب س + ب ص)$$

$$= (2اس + اص) + (ب + ا)ص$$

لاحظ أن:

يمكن إجراء التقسيم بطريقةٍ أخرى كما يلي:

$$\text{المقدار} = 2اس + 2ب س + اص + ب ص$$

$$= (2اس + 2ب س) + (اص + ب ص)$$

$$= (2اس + 2ب س) + (ا + ب)ص$$

مثال (١)



حلل كلًّا من المقادير الآتية:

ب $16س^2 - 21 + 6ا - 9ب^2$

أ $3س^2 + 2س^2 - س - 2$

ج $1 - س - 2س^2 - 4س ص - 4ص^2$

الحل

أ المقدار $= 3س^2 + 2س^2 + (-س - 2)$

$= 5س^2 - (س + 2)$



∴ المقدار = (س + ٢) (س - ١)

$$(س + ٢) (س + ١) (س - ١) =$$

ب نلاحظ عدم وجود علاقة بين الحد الأول وباقي الحدود؛ ولذا يمكن تقسيمها كالتالي:

$$\text{المقدار} = ١٦س^٢ - (٢١أ + ٩ب^٢)$$

$$= ١٦س^٢ - (أ - ٣ب)^٢$$

$$= [(أ - ٣ب) + ٤س] [(أ - ٣ب) - ٤س] = (٤س + أ - ٣ب) (٤س - أ - ٣ب)$$

ج المقدار = (١) - (س + ٢س + ٤ص + ٢ص)

$$= ١ - (س + ٢ص)^٢$$

$$= (١ - س - ٢ص) (١ + س + ٢ص)$$

مثال (٢)



(٢) حل كلاً مما يأتي تحليلًا كاملاً:

أ س(ع - ص) + ل(ص - ع)

ب س^٢ - س^٢ + س - ١

الحل

أ المقدار = س(ع - ص) - ل(ع - ص)

$$= (ع - ص) (س - ل)$$

ب المقدار = (س^٢ - س^٢) + (س - ١)

$$= س(س - ١) + (س - ١)$$

$$= (س - ١) (س + ١)$$

حل آخر:

$$\text{المقدار} = (س - ١) - (س - ١)$$

$$= (س - ١) (س + ١) - (س - ١) (س + ١)$$

$$= (س - ١) (س + ١ - ١) =$$

$$= (س - ١) (س + ١)$$

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



سوف تتعلم

التحليل بإكمال المربع.

مصطلحات أساسية

إكمال المربع.

سبق أن تعلمت أن:

المربع الكامل يكون على الصورة $a^2 \pm 2ab + b^2$ ويحلل بالصورة $(a \pm b)^2$ وتوجد بعض المقادير لا تكون على صورة مربع كامل، يمكن إكمال المقدار ليكون مربعًا كاملًا.

مثال ١



حلل المقدار: $s^4 + 4sv^2 + 4v^4$

الحل

هذا المقدار لا نستطيع تحليله بما سبق دراسته من طرق التحليل، ولكي تحصل

على مربع كامل يجب إضافة الحد $2 \times \sqrt{s^4} \times \sqrt{4v^4} = 4sv^2$ أي $4sv^2$

$$\text{المقدار} = s^4 + 4sv^2 + 4v^4 = (s^2 + 2v^2)^2$$

$$= (s^2 + 2v^2)^2 - 2(s^2 + 2v^2) + 2 = (s^2 + 2v^2 - 2)^2$$

$$= (s^2 + 2v^2 - 2)^2$$

$$= (s^2 + 2v^2 - 2)^2$$

مثال ٢



حلل المقدار: $9a^2 - 13ab + 4b^2$

الحل

المقدار $= 9a^2 - 13ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2$ ليكون مربعًا كاملًا يجب أن يكون:

$$\text{الحد الأوسط} = 2 \times 3a \times 2b = 12ab$$



$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= 2(213) - 2(212) + 2(21) - 2(2) \\ &= 2(213 - 212 + 21 - 2) \\ &= (213 - 212 + 21 - 2) \\ &= (213 - 212 + 21 - 2) \\ &= (213 - 212 + 21 - 2) \end{aligned}$$

حل آخر

نلاحظ أن المقدار $213 - 212 + 21 - 2$ يمكن تحليله كمقدارٍ ثلاثيٍّ.

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= (213 - 212) (21 - 2) \\ &= (213 - 212) (21 - 2) \end{aligned}$$

وهو نفس التحليل السابق مع استخدام خاصية الإبدال.

مثال (٣)



أوجد قيمة k إذا كان $216 - 132 + k$ مربع كامل.

الحل

$$(1) \quad 216 - 132 + k \text{ مربع كامل}$$

$$\therefore \text{المقدار} = (\sqrt{k} - 18)^2$$

$$(2) \quad 216 - 132 + k = 116 + \sqrt{k} + k$$

من (١) ، (٢)

$$132 = \sqrt{116 + k} + k$$

بقسمة الطرفين على 116

$$\therefore 2 = \sqrt{1 + \frac{k}{116}} + \frac{k}{116}$$

بتربيع الطرفين

$$\therefore k = 4$$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



حل المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد جبرياً

فكر وناقش

سوف تتعلم

حلُّ معادلةٍ من الدرجة الثانية
في متغير واحد.

مصطلحات أساسية

حلُّ معادلة من الدرجة الثانية في
متغير واحد.
جذور المعادلة.
حل معادلة.

سبق أن تعلمت أن:

إذا كان a ، b عددين حقيقيين وكان $a \times b = 0$ فإن:

$$a = 0 \text{ أو } b = 0$$

مثلاً: إذا كان $(s - 5)(s + 2) = 0$ (1)

فإن: $s - 5 = 0$ أو $s + 2 = 0$

$$\therefore s = 5 \text{ أو } s = -2$$

لاحظ أن:

- كلاً من $s = 5$ ، $s = -2$ يسمى جذراً للمعادلة (1)
- مجموعة حل المعادلة هي $\{5, -2\}$

مثال 1



أوجد مجموعة الحل للمعادلة $s^2 - 5s - 3 = 0$ في ح

الحل

بتحليل الطرف الأيمن، تكون المعادلة بالصورة الآتية:

$$0 = (s - 3)(s + 1)$$

$$0 = s - 3 \text{ أو } 0 = s + 1$$

$$s = 3 \text{ أو } s = -1$$

$$s = \frac{1}{3} \text{ أو } s = 3$$

∴ مجموعة الحل هي $\{3, \frac{1}{3}\}$



بضرب طرفي المعادلة في س

$$س^2 - 1 = 0$$

$$س^2 - 1 = 0$$

$$0 = (س + 1)(س - 1)$$

$$0 = 1 + س^2 \quad \text{أو} \quad 0 = 1 - س^2$$

$$س^2 = 1$$

$$س = 1 \quad \text{أو} \quad س = -1$$

التحقق:

ضعف العدد 2

المعكوس الضربي = 1

التحقق:

ضعف العدد = 1

المعكوس الضربي = 2

واضح أنه في الحالتين ضعف العدد يزيد عن المعكوس الضربي بمقدار 1

مثال 4



مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار 4 سم فإذا كانت مساحته 21 سم² فأوجد بعديه.

الحل

نفرض أن عرض المستطيل = س سم

∴ الطول = (س + 4) سم

$$21 = (س + 4)س$$

$$0 = 21 - س^2 - 4س$$

$$0 = (س + 7)(س - 3)$$

$$س = 3 \quad \text{أو} \quad س = -7$$

$$س = 3 \quad \text{أو} \quad س = -7$$

∴ عرض المستطيل = 3 سم ، طوله = 3 + 4 = 7 سم

التحقق: مساحة المستطيل = 3 × 7 = 21 سم²

(وهو مرفوض لأنه سالب)



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة في ح

الدرس الأول: القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة في ح.

الدرس الثاني: قوانين القوى الصحيحة غير السالبة في ح.

الدرس الثالث: قوانين القوى الصحيحة السالبة في ح.

الدرس الرابع: العمليات الحسابية باستخدام القوى الصحيحة.



الوحدة الثانية

الدرس الأول

القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة في ح

فكر وناقش

سوف تتعلم

☆ مفهوم القوى الصحيحة

غير السالبة والسالبة.

مصطلحات أساسية

☆ ح* مجموعة الأعداد

الحقيقية ما عدا الصفر.

☆ قوى صحيحة غير سالبة

في ح.

☆ قوى صحيحة سالبة في ح.

☆ معادلة أسية في ح.

أولاً: القوى الصحيحة غير السالبة:

سبق أن درست القوى الصحيحة في مجموعة الأعداد النسبية ن:
لاحظ أن:

$$1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad 2 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

إذا كان $a \in \mathbb{H}$ ، $n \in \mathbb{N}^+$ فإن $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_n$ حيث أمكرر كعامل ن من المرات.

أمثلة

$$1 \quad \sqrt[2]{27}^4 = (\sqrt[2]{27})^4 = \sqrt[2]{27} \times \sqrt[2]{27} \times \sqrt[2]{27} \times \sqrt[2]{27}$$

$$2 \quad 4 = 4^1 = \sqrt[2]{4}^2 = \sqrt[2]{4} \times \sqrt[2]{4}$$

$$3 \quad -5 = -5^1 = \sqrt[3]{-5}^3 = \sqrt[3]{-5} \times \sqrt[3]{-5} \times \sqrt[3]{-5}$$

إذا كان $a \in \mathbb{H}^*$ فإن $a^0 = 1$

$$\text{فمثلاً: } (\sqrt[2]{7})^{\text{صفر}} = 1, \quad \left(\frac{1}{11}\right)^{\text{صفر}} = 1$$

ثانياً: القوى الصحيحة السالبة

فكر وناقش

$$1 = 1^0 = 2^{-2} \times 2^2 = 2^{-2} \times 2^2 = 1$$

فيكون: $s^m \times s^n = s^{m+n} = 1$ حيث $s \neq 0$ ، $m \neq 0$



إذا كان $a \in \mathbb{C}^*$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$

فإن $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ ، $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

فمثلاً: $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$ ، $\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$



إذا كانت $s = 3$ ، $\sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$ ، فأوجد في أبسط صورة قيمة كل من:

١) $s^{-2} \cdot \sqrt[4]{3}$ ٢) $(s^{-2} \times \sqrt[4]{3})^{-2}$ ٣) $(\frac{s}{\sqrt{3}})^{-3}$

أمثلة



١) إذا كان $s = \frac{3\sqrt[2]{3}}{2}$ ، $\frac{1}{3\sqrt[2]{3}} = \sqrt[2]{3}$ ، $\frac{3\sqrt[2]{3}}{2} = \sqrt[2]{3}$ ، فأوجد قيمة: $s^2 + (s+2) \times \sqrt[2]{3}$

الحل

المقدار = $s^2 + s^2 \times \sqrt[2]{3} + (s+2) \times \sqrt[2]{3}$

$$\frac{\sqrt[2]{3}}{8} = \frac{\sqrt[2]{3}}{6} \times \frac{2}{4} = [\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + 1] \times \frac{2}{4} = [\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3\sqrt[2]{3}}) \times (\frac{3\sqrt[2]{3}}{2}) + 1] \times (\frac{3\sqrt[2]{3}}{2}) =$$

قاعدة هامة:

إذا كان $a = 1$ فإن $m = n$ لكل $a \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$

فمثلاً: إذا كان $2\sqrt[2]{3} = s(\sqrt[2]{3})$ فإن $2\sqrt[2]{3} = s(\sqrt[2]{3})$ $\therefore s = 2$

إذا كان $a^n = b$ فإن $a = b^{\frac{1}{n}}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $\{1, 3, 5, \dots\}$ ، $|a| = |b|^{\frac{1}{n}}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $\{2, 4, 6, \dots\}$

فمثلاً: $s = \frac{1}{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[2]{3}^{-1}$ فإن $s = \sqrt[2]{3}^{-1}$ $\therefore s = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}$

٢) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في \mathbb{C} :

أ) $\frac{125}{27} = s^2 + s(\frac{3}{5})$ ب) $s^2 + s(\sqrt[3]{3}) = 0$

الحل

أ) $\frac{125}{27} = s^2 + s(\frac{3}{5})$ $\therefore s^2 + s(\frac{3}{5}) - \frac{125}{27} = 0$ ب) $s^2 + s(\frac{3}{5}) = 0$ $\therefore s(s + \frac{3}{5}) = 0$ $\therefore s = 0$ أو $s = -\frac{3}{5}$

٢) $s^2 + s(\sqrt[3]{3}) = 0$ $\therefore s(s + \sqrt[3]{3}) = 0$ $\therefore s = 0$ أو $s = -\sqrt[3]{3}$

ب) $s^2 + s(\sqrt[3]{3}) = 0$ $\therefore s(s + \sqrt[3]{3}) = 0$ $\therefore s = 0$ أو $s = -\sqrt[3]{3}$

٣) $s^2 - 2s - 3 = 0$ $\therefore (s-3)(s+1) = 0$ $\therefore s = 3$ أو $s = -1$

مجموعة الحل هي $\{1, 1\}$

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



أولاً:

$${}^l({}^m\sqrt{a}) = {}^m({}^l\sqrt{a}) \times {}^l({}^m\sqrt{a}) \quad \text{ماذا تلاحظ؟}$$

إذا كان $a \in \mathbb{R}^+$ ، m, n عددين صحيحين غير سالبين

$$\text{فإن: } a^m \times a^n = a^{m+n}$$

تعميم:

إذا كان $a \in \mathbb{R}^+$ ، m, n, l أعداداً صحيحة غير سالبة
فإن: $(a^m)^l = a^{m \times l} = a^l \times \dots \times a^l$

من القانون السابق نجد أن: ${}^l({}^m\sqrt{a}) = {}^m({}^l\sqrt{a}) \times {}^l({}^m\sqrt{a})$

$$\text{ثانياً: } {}^{20}\sqrt{a} = ({}^5\sqrt{a})^4 = ({}^4\sqrt{a})^5 \quad \text{ماذا تلاحظ؟}$$

إذا كان $a \in \mathbb{R}^+$ ، m, n عددين صحيحين غير سالبين $m \leq n$

$$\text{فإن: } a^m \div a^n = a^{m-n}$$

من القانون السابق نجد أن: ${}^{20}\sqrt{a} = ({}^5\sqrt{a})^4 = ({}^4\sqrt{a})^5$

$$\text{ثالثاً: } 6 = 3 \times 2 = ({}^2\sqrt{3}) \times ({}^2\sqrt{3}) = ({}^2\sqrt{3 \times 3})$$

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^+$ ، n عدداً صحيحاً غير سالب

$$\text{فإن: } (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

تعميم:

إذا كان $a, b, c, \dots, k \in \mathbb{R}^+$ ، n عدداً صحيحاً غير سالب
فإن: $(a \times b \times c \times \dots \times k)^n = a^n \times b^n \times c^n \times \dots \times k^n$

سوف تتعلم

- ☆ قوانين القوى الصحيحة غير السالبة في ح.
- ☆ حل المسائل على القوى الصحيحة غير السالبة في ح.

مصطلحات أساسية

- ☆ قوى صحيحة غير سالبة.
- ☆ مجموعة الأعداد الحقيقية ح.



رابعًا:

$$\frac{9}{25} = \frac{{}^4(\sqrt[3]{7})}{{}^4(\sqrt[5]{7})} = {}^4(\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[5]{7}})$$

إذا كان a ، $b \in \mathbb{C}$ ، فإن $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ، n عدد صحيح غير سالب حيث $b \neq 0$ ، $a \neq 0$.

تعميم: إذا كان a ، b ، c ،، $k \in \mathbb{C}$ ، n عددًا صحيحًا غير سالب فإن:

$$\left(\frac{a \times \dots \times b \times \dots \times c \times \dots \times k}{ج \times د \times و \times ز \times ح \times ط \times ي \times ك}\right)^n = \frac{a^n \times \dots \times b^n \times \dots \times c^n \times \dots \times k^n}{ج^n \times د^n \times و^n \times ز^n \times ح^n \times ط^n \times ي^n \times ك^n}$$

حيث إن أيًا من عوامل المقام $\neq 0$.

خامسًا:

$${}^2(2) = {}^2(2) \times {}^2(2) \times {}^2(2) = {}^3(2) \quad \text{ماذا تلاحظ؟}$$

إذا كان a ، $b \in \mathbb{C}$ ، m ، n عددين صحيحين غير سالبين فإن $(a^m)^n = a^{m \times n}$.

تعميم: إذا كان a ، b ، c ،، $k \in \mathbb{C}$ ، n عدد صحيح غير سالب فإن:

$$\left(\frac{a^m \times \dots \times b^n \times \dots \times c^p \times \dots \times k^q}{ج^r \times د^s \times و^t \times ز^u \times ح^v \times ط^w \times ي^x \times ك^y}\right)^n = \frac{a^{m \times n} \times \dots \times b^{n \times p} \times \dots \times c^{p \times n} \times \dots \times k^{q \times n}}{ج^{r \times n} \times د^{s \times n} \times و^{t \times n} \times ز^{u \times n} \times ح^{v \times n} \times ط^{w \times n} \times ي^{x \times n} \times ك^{y \times n}}$$

حيث إن أيًا من عوامل المقام $\neq 0$.

مثال

اختصر كلا مما يأتي لأبسط صورة:

$$\frac{{}^2(\sqrt[3]{7}) \times {}^0(\sqrt[3]{7})}{{}^4(\sqrt[3]{7})} \quad \textcircled{3} \quad {}^2({}^2(\sqrt[3]{7}) \times {}^3(\sqrt[3]{7})) \quad \textcircled{2} \quad {}^2(\sqrt[3]{7}) \times {}^2(\sqrt[3]{7}) \times \sqrt[3]{7} \quad \textcircled{1}$$

الحل

$$8 = {}^6(\sqrt[3]{7}) = {}^{3+2+1}(\sqrt[3]{7}) = {}^3(\sqrt[3]{7}) \times {}^2(\sqrt[3]{7}) \times \sqrt[3]{7} \quad \textcircled{1}$$

$$32 = 2 \times 16 = {}^2(\sqrt[3]{7} \times 4) = {}^2(2 \times \sqrt[3]{7} \times 2) = {}^2({}^2(\sqrt[3]{7}) \times {}^2(\sqrt[3]{7})) \quad \textcircled{2}$$

$$9 = {}^4(\sqrt[3]{7}) = {}^{4-3+0}(\sqrt[3]{7}) = \frac{{}^3(\sqrt[3]{7}) \times {}^0(\sqrt[3]{7})}{{}^4(\sqrt[3]{7})} \quad \textcircled{3}$$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الوحدة الثانية الدرس الثالث

قوانين القوى الصحيحة السالبة في ح

فكر وناقش

تعميم قوانين الأسس

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^+$ ، $m, n \in \mathbb{Z}$ فإن:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \text{ج}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad \text{ج}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \quad \text{ج}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{ج}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \quad \text{ج}$$

سوف تتعلم

- ☆ تعميم قوانين القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة في ح.

مصطلحات أساسية

- ☆ قوى صحيحة سالبة.
- ☆ مجموعة الأعداد الحقيقية ح

ملاحظات:

١ إذا كان $a \in \mathbb{R}^+$ ، $n \in \mathbb{Z}$ فإن $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ كل منهما معكوس ضربي

للآخر، $a^{-n} \times a^n = 1$ **مثال:** $1 = 0^{-1} \times 0^1 = 0^{-37} \times 0^{37}$

٢ إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^+$ ، $n \in \mathbb{Z}$ فإن $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

مثال: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^0 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^0$ ، حيث: $1 = 0^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right) \times 0^1 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$

أمثلة

١ أوجد في أبسط صورة قيمة كل من:

$$\frac{4 \times 1^{-2}}{1^{-3}} \quad \text{ج}$$

$$4^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{ب}$$

$$1^{-1} (0\sqrt{5}) \quad \text{أ}$$

الحل

$$0\sqrt{5} = \frac{0\sqrt{5}}{0} = \frac{0\sqrt{5}}{0\sqrt{5}} \times \frac{0}{0\sqrt{5}} = \frac{0}{0\sqrt{5}} = 1^{-1} (0\sqrt{5}) \quad \text{أ}$$

$$6 = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{4 \times 1^{-2}}{1^{-3}} \quad \text{ج}$$

$$\frac{4}{9} = 4^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right) = 4^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{ب}$$



الوحدة الثانية الدرس الرابع

العمليات الحسابية باستخدام القوى الصحيحة

فكر وناقش

.. **أولاً:** أوجد في أبسط صورة ناتج كل مما يأتي:

$$\frac{\sqrt[2]{(3\sqrt{7})}}{\sqrt[2]{7}} - \frac{\sqrt[2]{7\sqrt{3}}}{\sqrt[2]{3}} \quad (2) \quad \sqrt[3]{79} \div \frac{1}{(\sqrt[3]{7})} \quad (1)$$

سبق أن درسنا أن:

(بـ حيث كل من ب، د ≠ ٠)

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \times \frac{ا}{ب}$$

(بـ حيث كل من ب، ج، د ≠ ٠)

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \div \frac{ا}{ب}$$

(بـ حيث كل من ب، د ≠ ٠)

$$\frac{ا+ب}{د} = \frac{ا}{د} + \frac{ب}{د}$$

(بـ حيث كل من ب، د ≠ ٠)

$$\frac{ا-ب}{د} = \frac{ا}{د} - \frac{ب}{د}$$

سوف تتعلم

☆ إجراء العمليات

(+، -، ×، ÷)

على القوى الصحيحة.

مصطلحات أساسية

☆ قوى صحيحة غير سالبة.

☆ قوى صحيحة سالبة.

☆ ترتيب العمليات.

ثانياً: باستخدام الحساب العقلي أوجد: $4 + 5 \times 3 \div 6 - 2 \times 3$
وللتحقق من ذلك استخدم الآلة الحاسبة.

عند إجراء العمليات الحسابية يراعى ترتيب العمليات الآتية:

١ إجراء العمليات داخل الأقواس الداخلية ثم الخارجية إن وجدت.

٢ حساب قوى الأعداد.

٣ إجراء عمليات الضرب أو القسمة من اليمين إلى اليسار.

٤ إجراء عمليات الجمع أو الطرح من اليمين إلى اليسار.

وهذا هو نفس الترتيب المستخدم في الآلات الحاسبة.



أمثلة



١ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:



ب $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[5]{5} \div (\sqrt[5]{5})$

أ $4^{-6} \div 2^{-3} \times 3^{-2}$

الحل

أ $4^{-6} \times 2^{-3} \times 3^{-2} = 4^{-6} \div 2^{-3} \times 3^{-2}$
 $4^{-6+3} \times 3^{-2} = 4^{-3} \times 3^{-2} = 2^{-3} \times 3^{-2} =$
 $18 = 9 \times 2 = 2^3 \times 3^2 =$

وتستخدم الآلة الحاسبة للتأكد من صحة ناتج العملية السابقة على النحو الآتي:

ابدأ $\rightarrow 2 \text{ [x]} \text{ [(-)]} 3 \text{ [x]} 3 \text{ [x]} \text{ [(-)]} 2 \text{ [x]} \text{ [(-)]} 6 \text{ [x]} \text{ [(-)]} 4 \text{ [=]$

ب $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{2})^2} + \sqrt[3]{(\sqrt[5]{5})} \div (\sqrt[5]{5}) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[5]{5} \div (\sqrt[5]{5})$

$11 = 6 + 5 = 6 + \sqrt[2]{(\sqrt[3]{2})^2} = 3 \times 2 + \sqrt[3]{2} =$

٢ إذا كان: $\frac{1}{3} = \frac{8^s \times 3^s}{1+3^{11}}$ فأوجد قيمة س

الحل

$\frac{1}{3} = \frac{8^{3s} \times 3^s}{1+3^{(2s \times 3)}}$

$\frac{1}{3} = \frac{8^{3s} \times 3^s}{2+3^{2s} \times 3^s}$

$\frac{1}{3} = 2^{-s-2} \times 3^{3s} \times 3^{-s-1}$

$\frac{1}{3} = 2^{-s-2} \times 3^{2s-1}$

$\frac{1}{3} = 2^{-s-2} \times \frac{1}{3}$

$1 = 2^{-s-2}$

$2 = 2^{-s-2}$

$0 = 2 - s$

$2 = s$



٣ إذا كان $\sqrt[2]{a} = b$ ، $\sqrt[3]{a} = b$ فأوجد القيمة العددية لكل من:

$$\frac{b^4 - a^4}{b^2 + a^2} \quad \text{أ} \quad \frac{b^3 + a^3}{b + a} \quad \text{ب}$$

الحل

$$\frac{(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{b^2 + a^2} = \frac{b^4 - a^4}{b^2 + a^2} \quad \text{أ}$$

$$1 = 2 - 3 = 2(\sqrt[2]{a}) - 2(\sqrt[3]{a}) = 2a - 2b =$$

$$b^2 + a^2 - 2a = \frac{(b^2 + a^2 - 2a)(b + a)}{b + a} = \frac{b^3 + a^3}{b + a} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt[2]{a} - 0 = 2 + \sqrt[2]{a} - 2 = 2(\sqrt[2]{a}) + \sqrt[3]{a} \times \sqrt[2]{a} - 2(\sqrt[2]{a}) =$$

٤ أوجد قيمة s في كل مما يأتي:

$$\text{ب) } 1 = 3 - s^2 \sqrt[2]{s}$$

$$\text{أ) } (\frac{1}{3})^{-s} = 27$$

الحل

$$\text{ب) } 1 = 3 - s^2 \sqrt[2]{s} \therefore$$

$$\sqrt[2]{s} = 3 - s^2 \therefore$$

$$0 = 3 - s^2 \therefore$$

$$3 = s^2 \therefore$$

$$\therefore s = \frac{3}{2}$$

$$\text{أ) } (\frac{1}{3})^{-s} = 27 \therefore$$

$$\therefore 3^{-1s} = 3^3 \therefore$$

$$\therefore -1s = 3 \therefore$$

$$\therefore s = -2$$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الاحتمال



سوف تتعلم

- 🔗 معنى الاستدلال الإحصائي.
- 🔗 مفهوم العينة.
- 🔗 التجربة العشوائية.
- 🔗 مصادر العينة.
- 🔗 الحدث.
- 🔗 مفهوم الاحتمال.
- 🔗 التنبؤ.

مصطلحات أساسية

- 🔗 عينة.
- 🔗 تجربة عشوائية.
- 🔗 مصادر العينة.
- 🔗 حدث.
- 🔗 احتمال.
- 🔗 تنبؤ.

سبق أن عرفت بعض الإجراءات والأساليب الإحصائية التي تستخدم في جمع وتنظيم البيانات التي تخص ظاهرة معينة، وكيفية عرض هذه البيانات في صورة جدولية باستخدام جداول التوزيع التكراري، والتوزيع التكراري المتجمع (صاعد- نازل)، ثم عرض هذه البيانات في صورة رسوم بيانية (مدرج تكراري - مضلع تكراري - منحنى تكراري ...) أو غيرها من وسائل العرض البياني.

كما أمكنك التعبير عن هذه البيانات بصورة موجزة بإيجاد الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال لها، بهدف القيام بعملية استدلال إحصائي واتخاذ القرارات المناسبة.

الاستدلال الإحصائي:

هيا نفكر 



قبل الشروع في إنشاء مصنع أو مشروع استثماري نقوم بدراسة جدوى اقتصادية للمشروع.

وعند مراقبة جودة الإنتاج لأحد المصانع تبين أن ٢٪ من إنتاج إحدى الآلات لا يطابق مواصفات الجودة المحددة (إنتاج معيب) ماعنى ذلك؟

تعد دراسة الجدوى لمشروع هي عملية تنبؤ بأحداث مستقبلية لنجاح المشروع وتحقيق أهدافه، لذلك نقوم



بفرض فروض معينة عن موقع المشروع وتوافر مستلزمات التشغيل - حجم العمالة - منافذ تسويق المنتج ثم اختبار صحة هذه الفروض لاتخاذ القرارات المناسبة نحو إنشاء المشروع.

كما أن ٢٪ من إنتاج إحدى الآلات غير مطابق للمواصفات المحددة، ليعني أن لكل ١٠٠ وحدة منتجة للآلة سنجد وحدتين معيبتين في كل الأحوال، بل قد نجد وحدة واحدة معيبة أو ربما ثلاث أو أربع وحدات معيبة، أو لا نجد أي وحدة معيبة على الإطلاق. ولهذا فإن نسبة ٢٪ هي متوسط الوحدات المعيبة عند فحص عدد كبير من العينات التي حجم كل منها ١٠٠ وحدة، وهو ما يعبر عنه باحتمال أن تنتج الآلة وحدة معيبة هو ٠,٠٢.

لهذا نجد أن:

الاستدلال الإحصائي يقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الذي تمثله، ونجري البحث على العينة، وما نحصل عليه من نتائج يتم تعميمه على المجتمع بأكمله، أي نستدل على وجود النتائج في المجتمع من خلال وجودها في العينة المأخوذة منه.



فكر

ما أنواع العينات؟ كيف يتم اختيار عينة عشوائية؟ كيف يتم اختيار عينة منتظمة؟ لماذا نستخدم العينات؟

مفهوم العينة

العينة هي جزء صغير من مجتمع كبير، تشبه المجتمع وتمثله وتختار بطريقة عشوائية، وتستخدم لتسهيل جمع البيانات عن المجتمع محل الدراسة، والتي تكون أقرب إلى الواقع، ويمكن اتخاذ القرارات في ضوء نتائج دراسة هذه العينات، ومن ثم يمكن تعميم هذه النتائج على المجتمع كله.

وتستخدم الاحتمالات في عملية اتخاذ قرار من مجموعة القرارات المتاحة، والخاصة بالمشكلة (الظاهرة) محل الدراسة في ظل عدم التأكد أو في مواجهة معلومات غير كاملة.

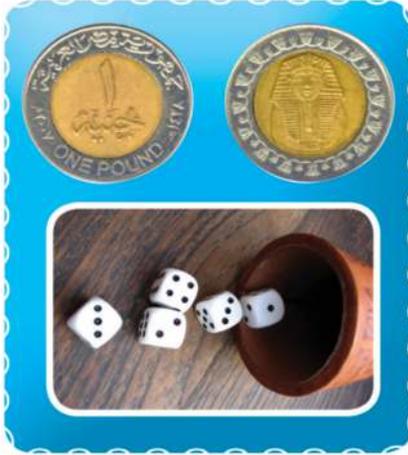
الاحتمال

سبق أن تعرّفنا على الاحتمال التجريبي والنظري، ويعتمد الاحتمال التجريبي على إجراء التجارب عملياً وتسجيل النتائج وحسب فيها الاحتمال بالعلاقة.

$$\text{احتمال حدوث نتيجة معينة} = \frac{\text{عدد مرات تكرار هذه النتيجة}}{\text{عدد جميع تكرارات النواتج الممكنة}}$$



وكلما زاد عدد التجارب اقتربت قيمة الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري ويكون:
العدد المتوقع لحدوث نواتج معينة = احتمال حدوثها × العدد الكلي للمفردات المعطاة.
 ويقوم الاحتمال النظري على مبدأ تكافؤ الفرص أو تساوى الإمكانيات فمثلاً عند:



- ١ إلقاء قطعة نقود منتظمة ، وملاحظة الوجه الظاهر: تكون فرصة ظهور الصورة ص تساوى فرصة ظهور الكتابة ك.
- ٢ إلقاء حجر نرد منتظم ، وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى: تكون فرصة ظهور كل وجهه متساوية.
- ٣ سحب كرة من كيس به مجموعة كرات ملونة لها نفس الحجم ، ونفس العدد لكل لون، تكون فرصة سحب الكرة متساوية.
- ٤ سحب بطاقة من مجموعة بطاقات متماثلة ، وملاحظة ما كتب عليها ... إلخ.

هى تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها،
 ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً.

التجربة العشوائية

هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية،
 وعدد عناصرها ن (ف)

فضاء العينة ف

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة فإذا كان أ حدث فى ف فإن أ ⊂ ف،
 وعدد عناصره ن (أ) وهو عدد فرص وقوع الحدث أ

الحدث

فيكون: احتمال وقوع أى حدث أ ⊂ ف، ويرمز له بالرمز ل (أ)
حيث:

$$ل (أ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث (أ)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{ن (أ)}{ن (ف)}$$

$$ن (أ) \geq 1 \quad \text{حيث أن:} \quad \therefore \frac{ن (أ)}{ن (ف)} \geq 1$$

$$\therefore \frac{ن (أ)}{ن (ف)} \leq 1 \quad \therefore 0 \leq ل (أ) \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq ل (أ) \leq 1 \quad \text{أي أن } 0 \leq ل (أ) \leq 1$$



مثال (1)



مجموعة بطاقات مرقمة من ١ إلى ٢٤ خلطت جيدًا فإذا سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا، احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:

٤	٣	٢	١
٨	٧	٦	٥
١٢	١١	١٠	٩
١٦	١٥	١٤	١٣
٢٠	١٩	١٨	١٧
٢٤	٢٣	٢٢	٢١

- أ عددًا مضاعفًا للعدد ٤ ب عددًا مضاعفًا للعدد ٦
 ج عددًا مضاعفًا للعدد ٤ و ٦ معًا د عددًا مضاعفًا للعدد ٤ أو ٦
 هـ عددًا يقبل القسمة على ٢٥ و عددًا صحيحًا موجبًا أقل من ٢٥

الحل

مجموعة فضاء النواتج = {٢٤، ...، ٣، ٢، ١}

ن (ف) = ٢٤

<p>ب حدث ظهور عدد مضاعف للعدد ٦</p> <p>ب = {٦، ١٢، ١٨، ٢٤}، ن (ب) = ٤</p> <p>ل (ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{٤}{٢٤} = \frac{١}{٦}$</p>	<p>أ بفرض أن أ حدث ظهور عدد مضاعف للعدد ٤</p> <p>∴ أ = {٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤}</p> <p>ن (أ) = ٦</p> <p>ل (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٦}{٢٤} = \frac{١}{٤}$</p>
<p>د حدث ظهور عدد مضاعف للعدد ٤ أو ٦</p> <p>د = {٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤، ٦، ١٨}</p> <p>ن (د) = ٨</p> <p>ل (د) = $\frac{ن(د)}{ن(ف)} = \frac{٨}{٢٤} = \frac{١}{٣}$</p>	<p>ج حدث ظهور عدد مضاعف للعدد ٤، ٦ معًا.</p> <p>ج = {١٢، ٢٤}، ن (ج) = ٢</p> <p>ل (ج) = $\frac{ن(ج)}{ن(ف)} = \frac{٢}{٢٤} = \frac{١}{١٢}$</p>
<p>و س حدث ظهور عدد موجب أقل من ٢٥ وهو حدث أكيد لماذا؟</p> <p>س = {١، ٢، ٣، ...، ٢٤}</p> <p>∴ ن (س) = ٢٤ = ن (ف)</p> <p>ل (س) = $\frac{ن(س)}{ن(ف)} = \frac{٢٤}{٢٤} = ١$</p>	<p>هـ هـ حدث أن يكون العدد يقبل القسمة على ٢٥ وهو حدث مستحيل، لماذا؟</p> <p>هـ = ∅، ن (هـ) = صفر.</p> <p>∴ ل (هـ) = صفر.</p>

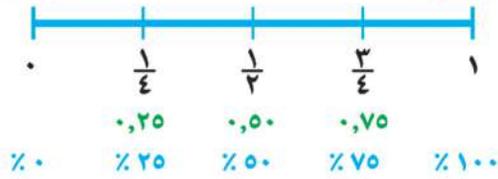
في المثال السابق لاحظ أن:

- ١ الحدث المستحيل (∅): هو حدث لا يمكن وقوعه. احتمال الحدث المستحيل = صفر.
- ٢ الحدث المؤكد (ف): هو الحدث الذي له كل النواتج الممكنة. احتمال الحدث المؤكد = ١



حدث مستحيل

حدث مؤكد



ويمكن توضيح ذلك بالرسم المقابل
حيث $l \in (a, b]$ كما يمكن كتابة الاحتمال
في صورة كسر عشري أو صورة نسبة مئوية.

مثال (٢)



في دراسة لاستطلاع رأى أجرته إحدى شركات إنتاج مسحوق الغسيل على مجموعة مكونة من ٣٠٠ سيدة تستخدم هذا النوع لمعرفة آرائهن في وزن العبوة المفضل لهن، كانت النتائج كالتالي:

الوزن بالجرام	١٢٥	٢٥٠	٣٧٥	٥٠٠	المجموع
عدد السيدات	١٢٠	٤٥	٩٦	٣٩	٣٠٠

أولاً: إذا تم اختيار إحدى السيدات عشوائياً، ما احتمال أن يكون الوزن المفضل لديها:
أ ١٢٥ جم ب ٢٥٠ جم ج ٣٧٥ جم د ٥٠٠ جم

ثانياً: بماذا تنصح مدير الشركة بناء على هذه الدراسة:

الحل

أولاً

أ احتمال أن تفضل السيدة وزن ١٢٥ جم = $\frac{120}{300} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$

ب احتمال أن تفضل السيدة وزن ٢٥٠ جم = $\frac{45}{300} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0,15 = 15\%$

ج احتمال أن تفضل السيدة وزن ٣٧٥ جم = $\frac{96}{300} = \frac{32}{100} = \frac{8}{25} = 0,32 = 32\%$

د احتمال أن تفضل السيدة وزن ٥٠٠ جم = $\frac{39}{300} = \frac{13}{100} = 0,13 = 13\%$

لاحظ أن:

١ يمكن كتابة الاحتمال على صورة نسبة مئوية أو كسر عشري أو كسر عادي

فإذا كان الاحتمال = $\frac{3}{20}$ فمثلاً فيكون الاحتمال = $\frac{3}{20} \times (100) = 15\%$

ثانياً: اكتب نصائحك لمدير الشركة، وناقش زملاءك، واحفظ التقرير بكتابة الفصل.



مثال (٣)



وجدت شركة تأمين على الحياة أن من بين عينة تشمل ١٠٠٠٠ رجل بين سن ٤٠ و سن ٥٠ عامًا، بلغت حالات الوفاة ٦٧ حالة خلال عام واحد.

أ ما احتمال أن يتوفى رجل بين سن ٤٠ و سن ٥٠ خلال عام واحد؟

ب لماذا تهتم شركات التأمين بهذه النتائج؟

ج إذا قامت الشركة بالتأمين على ٥٠٠٠٠ رجل بين سن ٤٠، سن ٥٠ فما عدد حالات استحقاق وثيقة التأمين خلال عام واحد؟

الحل

أ احتمال الوفاة = $\frac{67}{10000} = 0,0067$

ب تهتم شركات التأمين بالاحتمال التجريبي لتحديد قسط التأمين.

ج عدد حالات الوفاة المتوقعة خلال عام = العدد الكلي للمؤمن عليهم × احتمال الوفاة

$$335 = 0,0067 \times 50000 =$$

مثال (٤)

مدرسة بها ٣٢٠ تلميذاً وتلميذة إذا كان احتمال أن يكون التلميذ المثالي ولداً هو ٠,٦ فأوجد عدد بنات المدرسة؟

الحل

إذا كان احتمال أن يكون التلميذ المثالي ولداً = ٠,٦

فإن احتمال أن يكون التلميذ المثالي بنتاً = ٠,٤

$$\therefore \text{عدد بنات المدرسة} = \frac{4}{10} \times 320 = 128$$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



المساحات



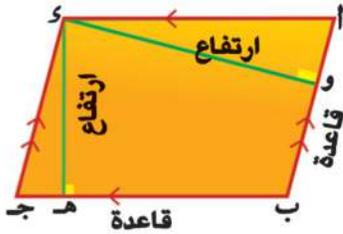
تساوي مساحتي متوازي أضلاع

فكر وناقش

في ضوء معلوماتك عن متوازي الأضلاع أجب عما يأتي:

- 1. ما تعريف متوازي الأضلاع؟
- 2. ما خواص متوازي الأضلاع؟
- 3. هل البعد بين كل مستقيمين متوازيين ثابت؟ وضح إجابتك بأمثلة حياتية.
- 4. هل المستطيل والمعين والمربع حالات خاصة من متوازي الأضلاع؟ ولماذا؟

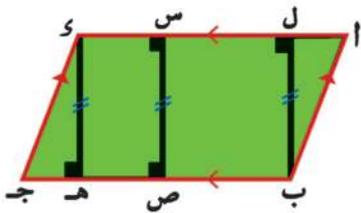
ارتفاع متوازي الأضلاع:



في الشكل المقابل: $\overline{أب}$ متوازي أضلاع إذا اعتبرنا $\overline{بج}$ قاعدة له وكان $ك \perp هـ$ \perp $\overline{أب}$ $ج$ فيكون:

طول $ك$ و $هـ$ ارتفاع مناظر للقاعدة $\overline{بج}$ وإذا اعتبرنا $\overline{أب}$ قاعدة لمتوازي الأضلاع، وكان $ك$ و $و$ \perp $\overline{أب}$ فيكون:

طول $ك$ و $و$ ارتفاع مناظر للقاعدة $\overline{أب}$



لاحظ أن: ارتفاع متوازي الأضلاع المناظر للقاعدة $\overline{بج}$ يكون مساويًا لطول $ك$ و $و$ حيث:

$$ك = هـ = و = ص = ل$$

لماذا؟

سوف تتعلم

- 1. متى تتساوى مساحتا متوازي أضلاع.
- 2. متى تتساوى مساحة متوازي أضلاع ومساحة مستطيل.
- 3. كيفية إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.
- 4. العلاقة بين مساحة متوازي الأضلاع ومساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والمحصور معه بين مستقيمين متوازيين.
- 5. كيفية إيجاد مساحة مثلث.

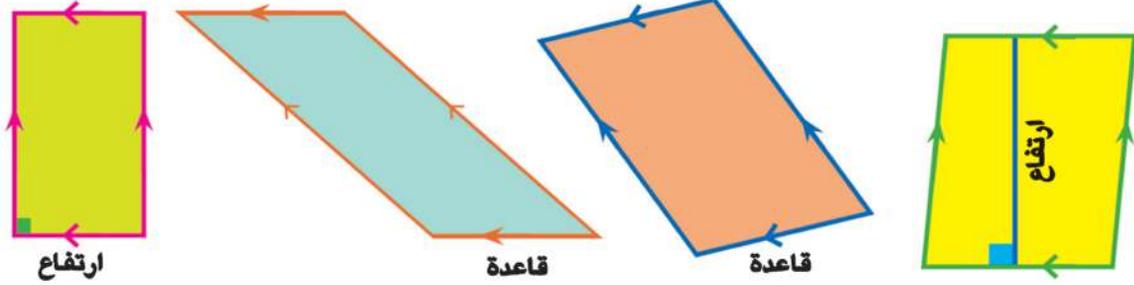
مصطلحات أساسية

- 1. مساحة.
- 2. متوازي أضلاع.
- 3. مستطيل.
- 4. مثلث.
- 5. قاعدة.
- 6. ارتفاع.
- 7. مستقيمان متوازيان.



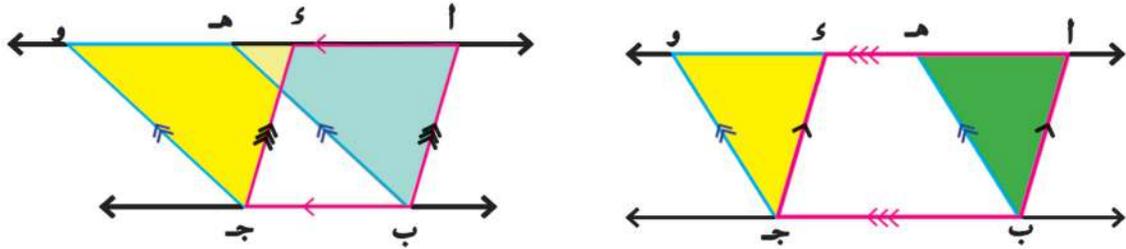


حدّد القاعدة والارتفاع المناظر لها لكلّ من متوازيات الأضلاع التالية:



نظرية 1

سطحا متوازيي الأضلاع المشتركين في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين أحدهما يحمل هذه القاعدة متساويان في المساحة.



المعطيات: أ ب ج د، هـ ب ج د متوازي أضلاع، ب ج قاعدة مشتركة لهما، ب ج // أ د

المطلوب: إثبات أن مساحة أ ب ج د = مساحة هـ ب ج د

البرهان: ∆ س ج د و صورة ∆ أ ب هـ بانتقال مسافة ب ج في اتجاه ب ج ←

∆ س ج د ≅ ∆ أ ب هـ لأن الانتقال تساوي قياسي

∴ مساحة الشكل أ ب ج د = مساحة ∆ س ج د =

مساحة الشكل أ ب ج د = مساحة ∆ أ ب هـ

∴ مساحة أ ب ج د = مساحة هـ ب ج د

وهو المطلوب



هيا نفكر



فى الشكل المقابل:

أب جى متوازي أضلاع، أه \perp ب ج

إذا كان و \perp ب ج فإن:

\triangle س ج و صورة \triangle أب هـ

بانتقال مسافة أى فى اتجاه أى

ما العلاقة بين مساحة \square أب جى، ومساحة المستطيل أه وى؟

نتائج

نتيجة 1

مساحة متوازي الأضلاع تساوى مساحة المستطيل المشترك معه فى القاعدة والمحصور معه بين مستقيمين متوازيين.



لاحظ أن:

مساحة المستطيل = الطول \times العرض

مساحة المستطيل أه وى = هـ و \times أه = ب ج \times أه لماذا؟

فتكون مساحة متوازي الأضلاع أب جى = ب ج \times أه

نتيجة 2

مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة \times الارتفاع



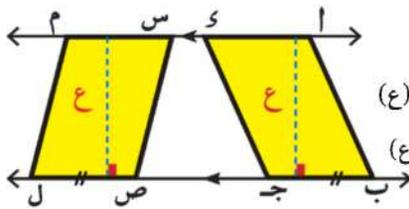
لاحظ أن:

البعد بين مستقيمين متوازيين ثابت فإذا كان ب ج = ص ل

فإن: مساحة \square أب جى = ب ج \times البعد بين المستقيمين المتوازيين (ع)

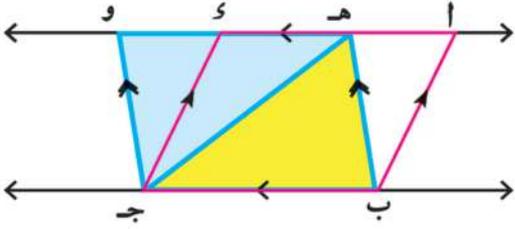
مساحة \square س ص ل م = س ص ل \times البعد بين المستقيمين المتوازيين (ع)

ماذا تستنتج؟



نتيجة ٣

متوازيات الأضلاع المحصورة بين مستقيمين متوازيين وقواعدها التي على أحد هذين المستقيمين متساوية في الطول تكون مساحاتها متساوية.



هيا نفكر

في الشكل المقابل: ب ج // أ و ،
أ ب ج د ، هـ ب ج د متوازي أضلاع
هـ ج قطر في متوازي الأضلاع هـ ب ج د

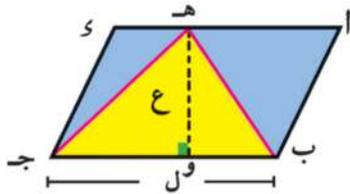
$$\therefore \text{مساحة } \triangle \text{ هـ ب ج} = \frac{1}{4} \text{ مساحة } \square \text{ هـ ب ج د}$$

$$\therefore \text{مساحة } \square \text{ هـ ب ج د} = \text{مساحة } \square \text{ هـ ب ج د}$$

$$\therefore \text{مساحة } \triangle \text{ هـ ب ج} = \frac{1}{4} \text{ مساحة } \square \text{ أ ب ج د}$$

نتيجة ٤

مساحة المثلث تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والمحصور معه بين مستقيمين متوازيين أحدهما يحمل القاعدة المشتركة؟



هيا نفكر

في الشكل المقابل:

أ ب ج د متوازي أضلاع

$$\text{مساحة } \triangle \text{ هـ ب ج} = \frac{1}{4} \text{ مساحة } \square \text{ أ ب ج د}$$

$$= \frac{1}{4} \times \text{ل} \times \text{ع}$$

نتيجة ٥

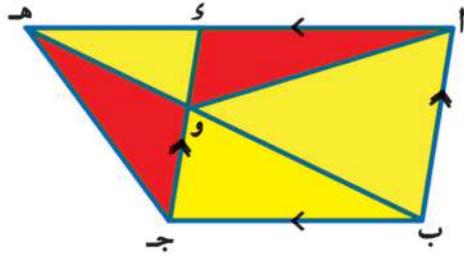
مساحة المثلث = $\frac{1}{4}$ طول قاعدته \times ارتفاعه



لاحظ أن:

- ١ ارتفاع المثلث هو طول القطعة العمودية المرسومة من رأس المثلث إلى الضلع المقابل لها.
- ٢ المستقيمتان التي تحمل القطع المستقيمة العمودية المرسومة من رؤوس المثلث إلى الأضلاع المقابلة لها تتقاطع في نقطة واحدة.





مثال



في الشكل المقابل:

أب جـى متوازي أضلاع، هـ \in أى ،

ب هـ \parallel جـى = {و}

برهن أن: مساحة \triangle أوى = مساحة \triangle هـ وجـ

الحل

المعطيات: أب جـى متوازي أضلاع، ب هـ \parallel جـى = {و}

المطلوب: إثبات أن مساحة \triangle أوى = مساحة \triangle هـ وجـ

البرهان: \therefore مساحة \triangle أوب = $\frac{1}{4}$ مساحة \square أب جـى

(١) \therefore مساحة \triangle أوى + مساحة \triangle ب وجـ = $\frac{1}{4}$ مساحة \square أب جـى

\therefore مساحة \triangle هـ ب جـ = $\frac{1}{4}$ مساحة \square أب جـى

(٢) \therefore مساحة \triangle هـ وجـ + مساحة \triangle ب وجـ = $\frac{1}{4}$ مساحة \square أب جـى

من (١)، (٢) نستنتج أن:

مساحة \triangle أوى = مساحة المثلث هـ وجـ

(وهو المطلوب)

هيا نفكر

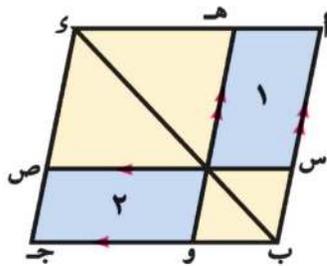


في كل من الشكلين

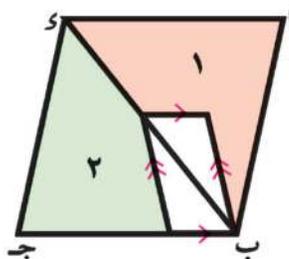
أب جـى متوازي أضلاع. (أ)، (ب):

لماذا تكون مساحة الشكل (١) =

مساحة الشكل (٢)؟



(ب)



(أ)



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



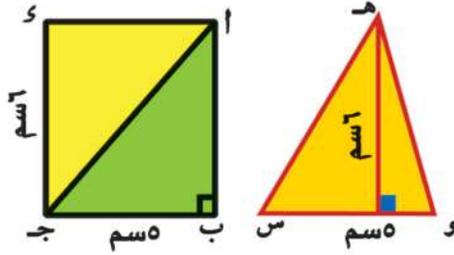
فكر وناقش

سوف تتعلم

متى يتساوى مساحتا مثلثين.

مصطلحات أساسية

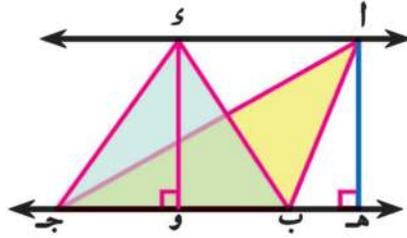
مساحة مثلث



إذا تطابق مثلثان، هل يتساويان في المساحة؟ إذا تساوى مثلثان في المساحة، هل يتطابقان؟ متى تتساوى مساحتا مثلثين؟

نظرية ٢

المثلثان المرسومان على قاعدة واحدة ورأسهما على مستقيم يوازي هذه القاعدة يكونان متساويين في المساحة.



المعطيات: $\overleftrightarrow{ا س} \parallel \overleftrightarrow{ج ب}$

المثلثان: $\triangle ا ب ج$ ،

$س$ و $ب ج$ يشتركان في

القاعدة $ب ج$

المطلوب: إثبات أن: مساحة $\triangle ا ب ج$ = مساحة $\triangle س ب ج$

العمل: نرسم $\overleftrightarrow{ا هـ} \parallel \overleftrightarrow{ج ب}$ ، $س$ و $و$ \perp $ب ج$

البرهان: $\therefore \overleftrightarrow{ا س} \parallel \overleftrightarrow{ج ب}$ ، $ا هـ$ ، $س$ و عمودين على $ب ج$

$\therefore ا هـ$ و $س$ مستطيل، $ا هـ = س$

(١) \therefore مساحة $\triangle ا ب ج = \frac{1}{2} ب ج \times ا هـ$

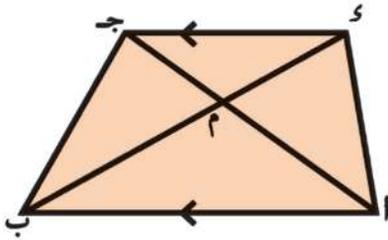
، مساحة $\triangle س ب ج = \frac{1}{2} ب ج \times س = \frac{1}{2} ب ج \times ا هـ$ (٢)

من (١)، (٢) \therefore مساحة $\triangle ا ب ج =$ مساحة $\triangle س ب ج$

(وهو المطلوب)



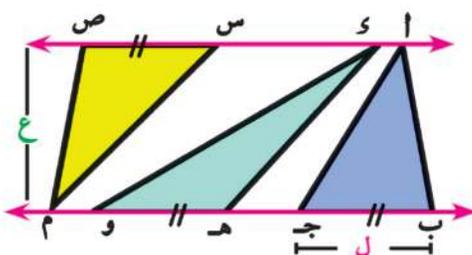
مثال (١) :



١ في الشكل المقابل:
 $\overline{ا ب} \parallel \overline{س ج}$ ، $ا ج \cap ب س = م$
 أكمل وفسر إجابتك:
 أ مساحة $\triangle ا ب س$ = مساحة $\triangle ا ج ب$ لأن $\overline{ا ب} \parallel \overline{س ج}$
 ب مساحة $\triangle س ا ج$ = مساحة $\triangle س ب ج$ لأن $\overline{ا ب} \parallel \overline{س ج}$
 ج مساحة $\triangle س ا م$ = مساحة $\triangle ج ب م$ لماذا؟

نتائج

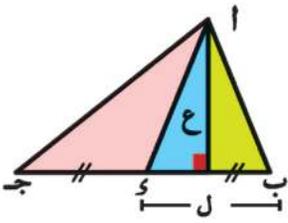
١ المثلثات التي قواعدها متساوية الطول والمحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية المساحة.



لاحظ أن:

أص \parallel ب ج ، $ب ج = ه و = س س$
 \therefore مساحة $\triangle ا ب ج$ = مساحة $\triangle س ه و$ = مساحة $\triangle س ص م$ $\frac{1}{4} ل \times ع$

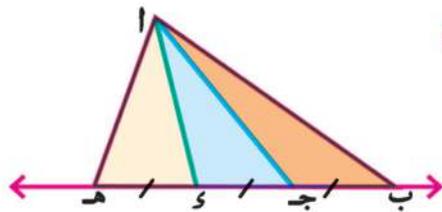
٢ متوسط المثلث يقسم سطحه إلى سطحين مثلثين متساويين في المساحة.



لاحظ أن:

أى متوسط للمثلث ا ب ج (ب س = س ج = ل)
 \therefore مساحة $\triangle ا ب س$ = مساحة $\triangle ا س ج$ $\frac{1}{4} ل \times ع$

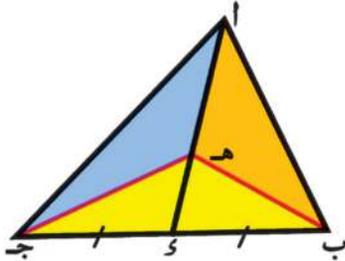
٣ المثلثات التي أطوال قواعدها متساوية ، وعلى مستقيم واحد ومشاركة في الرأس، تكون متساوية المساحة.



مساحة $\triangle ا ب ج$ = مساحة $\triangle ا ج س$ = مساحة $\triangle ا س ه$



🧐 **مثال (٢) :**



أب جـ مثلث فيه $\overline{أ س}$ متوسط، $هـ \in \overline{أ س}$ رسمت $\overline{ب هـ}$ ، جـ هـ
برهن أن: مساحة $\triangle أ ب هـ$ = مساحة $\triangle أ جـ هـ$

البرهان:

∴ $\overline{أ س}$ متوسط في المثلث.

∴ مساحة $\triangle أ ب س$ = مساحة $\triangle أ جـ س$ (١)

∴ $هـ س$ متوسط في $\triangle هـ ب جـ$

∴ مساحة $\triangle هـ ب س$ = مساحة $\triangle هـ جـ س$ (٢)

بطرح طرفي (٢) من طرفي (١) ينتج أن:

مساحة $\triangle أ ب هـ$ = مساحة $\triangle أ جـ هـ$

مثال (٣) :



في الشكل المقابل:

$\overline{أ د} // \overline{ب ج}$ ، $هـ \in \overline{ب ج}$ ، $و \in \overline{ب ج}$ حيث:

$ب هـ = ج و$ ، أو $هـ س = م$

برهن أن:

أولاً: مساحة $\triangle أ م هـ$ = مساحة $\triangle س م و$

ثانياً: مساحة الشكل أ ب هـ م = مساحة الشكل س ج و م

البرهان:

∴ $\overline{أ د} // \overline{هـ و}$ ، المثلثان أ هـ و، س هـ و يشتركان في القاعدة هـ و

∴ مساحة $\triangle أ هـ و$ = مساحة $\triangle س هـ و$

بطرح مساحة $\triangle م هـ و$ من الطرفين.

مساحة $\triangle أ هـ م$ = مساحة $\triangle س و م$

∴ $ب هـ = ج و$ ، $\overline{أ د} // \overline{ب ج}$

∴ مساحة $\triangle أ ب هـ$ = مساحة $\triangle س ج و$

بجمع (١)، (٢) ينتج أن:

مساحة الشكل أ ب هـ م = مساحة الشكل س ج و م (المطلوب ثانياً)

(١) (المطلوب أولاً)

(٢)



نظرية ٣



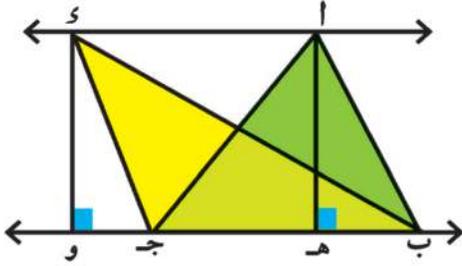
المثلثان المتساويان في مساحتهما ، والمرسومان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة من هذه القاعدة ، يكون رأسهما على مستقيم يوازي هذه القاعدة.

المعطيات: مساحة $\triangle أ ب ج =$ مساحة $\triangle و ج د$.

ب ج قاعدة مشتركة للمثلثين

المطلوب: إثبات أن: $أ و // ب ج$

العمل: نرسم $أ ه \perp ب ج$ ، $و و \perp ب ج$



البرهان: \therefore مساحة $\triangle أ ب ج =$ مساحة $\triangle و ج د$

$$\therefore \frac{1}{2} ب ج \times أ ه = \frac{1}{2} ب ج \times و و$$

$$\therefore أ ه = و و$$

$$\therefore \overline{أ ه} \perp \overline{ب ج}، \overline{و و} \perp \overline{ب ج}$$

$$\therefore \overline{أ ه} // \overline{و و}$$

\therefore الشكل $أ ه و و$ مستطيل وينتج أن: $أ و // ب ج$

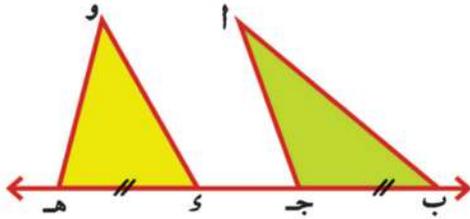
هيا نفكر



١ في الشكل المقابل:

ب، ج، و، ه تقع على مستقيم واحد

حيث $ب ج = و ه$



إذا كان: مساحة $\triangle أ ب ج =$ مساحة $\triangle و ج د$ ماذا تستنتج؟ فسر إجابتك.

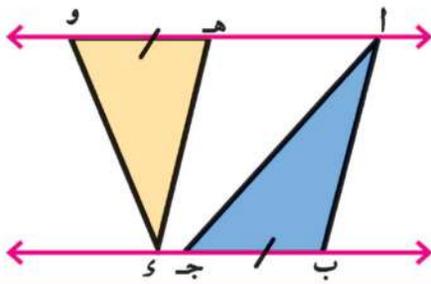
٢ في الشكل المقابل: $و \ni ب ج$ ، $أ \ni و ه$ ، $ب ج = و ه$

إذا كان:

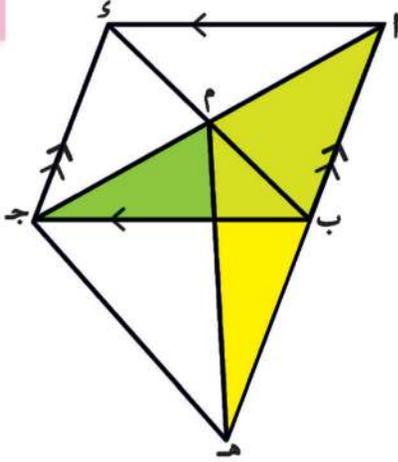
مساحة $\triangle أ ب ج =$ مساحة $\triangle و ج د$

ماذا تستنتج؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن: $أ و // ب ج$ لماذا؟



مثال (١)



أ ب ج د متوازي أضلاع \cap ج د \cap ب س = {م} هـ \Rightarrow أ ب \leftarrow بحيث: مساحة \triangle ا م هـ = مساحة \triangle ا ب ج
برهن أن: الشكل ب هـ ج د متوازي أضلاع.

البرهان: \therefore مساحة \triangle ا م هـ = مساحة \triangle ا ب ج

ب طرح مساحة \triangle ا ب م من الطرفين

\therefore مساحة \triangle ب م هـ = مساحة \triangle ب م ج

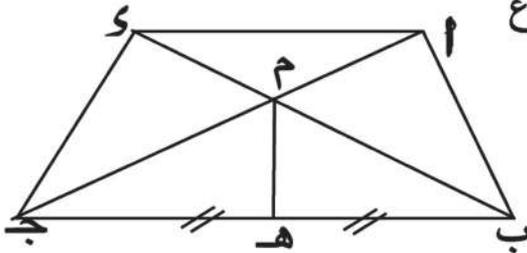
وهما مشتركان في القاعدة ب م وفي جهة واحدة منها

\therefore ج هـ // ب م (١)

\therefore الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

\therefore ب هـ // ج د (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن الشكل د ب هـ ج متوازي أضلاع



مثال (٢) في الشكل المقابل:

س ا ب ج د هـ م نمتوازي أضلاع

أثبت أن:

أولاً: مساحة \triangle ا م ب = مساحة \triangle س م ج

ثانياً: مساحة الشكل ا ب هـ م = مساحة الشكل د ج هـ م

الحل

\therefore \triangle ا ب ج، \triangle س ج د مرسومان على قاعدة واحدة ب ج ورأسهما على س ا // ب ج

\therefore مساحة \triangle ا ب ج = مساحة \triangle س ج د

\therefore مساحة \triangle ا م ب = مساحة \triangle س م ج

\therefore م هـ متوسط في \triangle م ب ج

\therefore مساحة \triangle م ب هـ = مساحة \triangle م ج هـ

\therefore مساحة الشكل ا ب هـ م = مساحة الشكل د ج هـ م



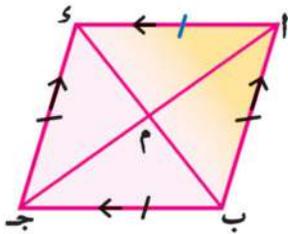
«٢» بجمع «١»، «٢» ينتج أن:

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



مساحات بعض الأشكال الهندسية

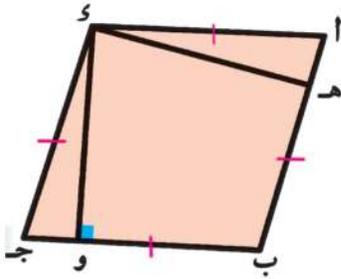
فكر وناقش



سبق أن عَرَفْتَ أَنَّ المَعِين هو متوازي أضلاع أضلاعه متساوية الطول.

- 🕒 ما العلاقة بين قُطري المَعِين؟
- 🕒 كيف تُوجَد مساحة المَعِين؟

مساحة المَعِين:



١ إذا كان طول ضلع المَعِين $ل$ وارتفاعه $ع$

فإن: مساحة المَعِين = $ل \times ع$

أي أن:

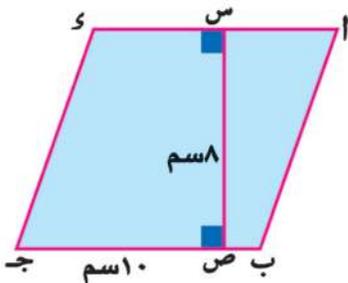
مساحة المَعِين = طول قاعدته \times ارتفاعه.

هيا نفكر 🧠

هل $ك = هـ$ و $س = و$ ؟ فسّر إجابتك.

مثال (١) 🧐

١ في كل من الشكلين التاليين : أوجد مساحة المَعِين أ ب ج د



١ المساحة = ب ج \times س ص

$$= ٨ \times ١٠ = ٨٠ \text{ سم}^2$$

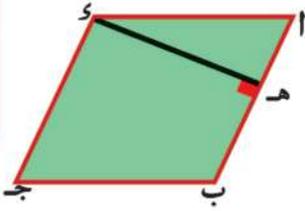
سوف تتعلم

- 🔗 كيفية إيجاد مساحة المَعِين.
- 🔗 كيفية إيجاد مساحة المربع بمعلومية طول قطره.
- 🔗 كيفية إيجاد مساحة شبه المنحرف.

مصطلحات أساسية

- 🔗 مربع.
- 🔗 مَعِين.
- 🔗 شبه منحرف.
- 🔗 مساحة.



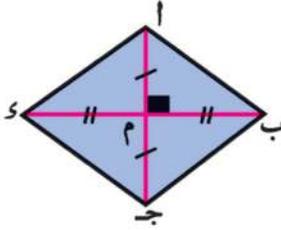


ب محيطُ المعين ا ب ج د = ٢٤ سم، و ه = ٥ سم

طول ضلع المعين = $٤ \div ٢٤ = ٦$ سم

∴ مساحة المعين = ا ب × ه = $٥ \times ٦ = ٣٠$ سم^٢

٢ تعلم أن قطري المعين متعامدان وينصف كل منهما الآخر، لاحظ الشكل المقابل



مساحة المعين ا ب ج د = ٢ مساحة ∆ ا ب د

$$٢ = \frac{١}{٢} \times ا ب \times ج د$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \times ا ب \times ج د$$

$$\frac{١}{٢} = ا ب \times ج د$$

أى أن: مساحة المعين = حاصل ضرب طولى قطريه.

∴ المربع هو معينٌ قطراه متساويان فى الطول.

∴ مساحة المربع = مربع طول قطره.

مثال : (٢)



أوجد مساحة المعين الذى طولاه قطرية ٨ سم، ١٢ سم.

الحل

مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطرية

$$١٢ \times ٨ \times \frac{١}{٢} =$$

$$= ٤٨ \text{ سم}^٢$$

مثال : (٣)



أوجد مساحة المربع الذى طول قطره ١٠ سم

الحل

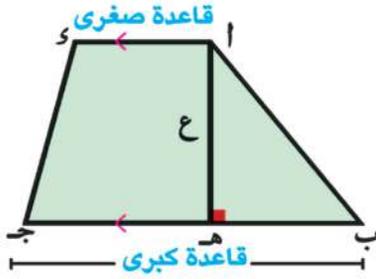
مساحة المربع = مربع طول قطره

$$= (١٠)^٢ \times \frac{١}{٢} =$$

$$= ٥٠ \text{ سم}^٢$$



شبه المنحرف

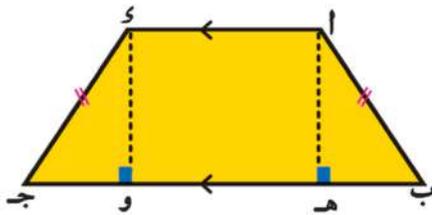


هو شكلٌ رباعيٌّ فيه ضلعان متوازيان يُعرفان بقاعدتيه ، ويسمى كلُّ ضلعٍ من الضلعين غير المتوازيين "ساقاً".

في الشكل المقابل: $\overline{اى}$ ، $\overline{بج}$ قاعدتا شبه المنحرف $\overline{أبجى}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{جى}$ ساقا شبه المنحرف $\overline{أبجى}$

شبه المنحرف له ارتفاع واحدٌ هو البعد العمودى بين قاعدتيه = ع

هيا نفكر



هل قطر شبه المنحرف يقسمه إلى مثلثين متساويين في المساحة؟
إذا كان: $\overline{أبجى}$ شبه منحرف متساوى الساقين $\overline{أب}$ ، $\overline{جى}$:

هل $\angle ب = \angle ج$ ؟

ارسم $\overline{أه} \perp \overline{بج}$ ، $\overline{و} \perp \overline{بج}$ وفسر إجابتك.

شبه المنحرف المتساوى الساقين:

$\overline{أبجى}$ شبه منحرف فيه $\overline{أب} = \overline{جى}$ فإن:

١ زوايتا كل من قاعدتيه متساويتان في القياس

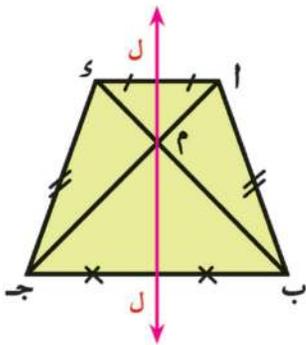
$$\angle ب = \angle ج ، \angle ا = \angle س ، \angle ا = \angle س$$

٢ قطراه متساويان في الطول $\overline{أج} = \overline{بى}$

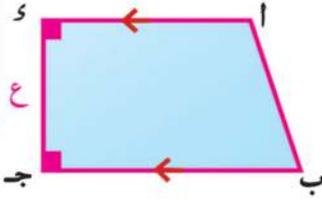
$$\overline{أج} \cap \overline{بى} = \{م\}$$

$$\therefore \overline{أم} = \overline{بم} ، \overline{بم} = \overline{جم}$$

٣ له محور تماثل واحد (ل) ينصف قاعدتيه.



شبه المنحرف القائم الزاوية



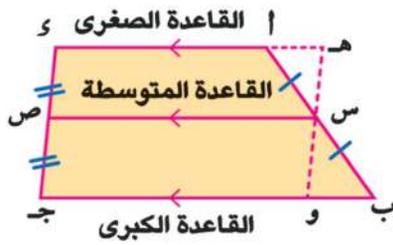
هو شبه منحرف فيه أحد ساقيه عمودي على القاعدتين المتوازيتين.

في الشكل المقابل: $\overline{ك ج} \perp \overline{ب ج}$ ، $\overline{ج د} \perp \overline{ا د}$ ،

\therefore ارتفاع شبه المنحرف = طول $\overline{ج د}$

القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف.

هي القطعة المستقيمة $\overline{س ص}$ الواصلة بين منتصفى الساقين في شبه المنحرف $\overline{ا ب ج د}$.



لاحظ أن:

$$\overline{س ص} \parallel \overline{ب ج} \parallel \overline{ا د}$$

$$\text{طول } \overline{س ص} = \frac{1}{2} (\overline{ا د} + \overline{ب ج})$$

مساحة شبه المنحرف:

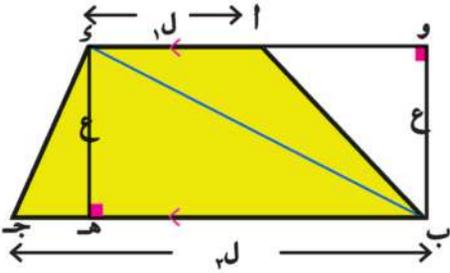
مساحة شبه المنحرف $\overline{ا ب ج د}$ =

مساحة $\triangle ا ب د$ + مساحة $\triangle ب ج د$

$$= \frac{1}{2} \overline{ا د} \times \overline{ب و} + \frac{1}{2} \overline{ب ج} \times \overline{د ه}$$

$$= \frac{1}{2} \overline{ا د} \times \overline{ع} + \frac{1}{2} \overline{ب ج} \times \overline{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \overline{ع} (\overline{ا د} + \overline{ب ج})$$



مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع طولي قاعدتيه المتوازيتين \times الارتفاع.

لاحظ أن: طول القاعدة المتوسطة = $\frac{1}{2}$ مجموع طول القاعدتين المتوازيتين.

\therefore مساحة شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة \times الارتفاع.

مثال : (٢)



أوجد مساحة شبه المنحرف الذي طولاه قاعدتيه المتوازيتين ٥ سم، ٩ سم والبعد بينهما ٤ سم.

الحل

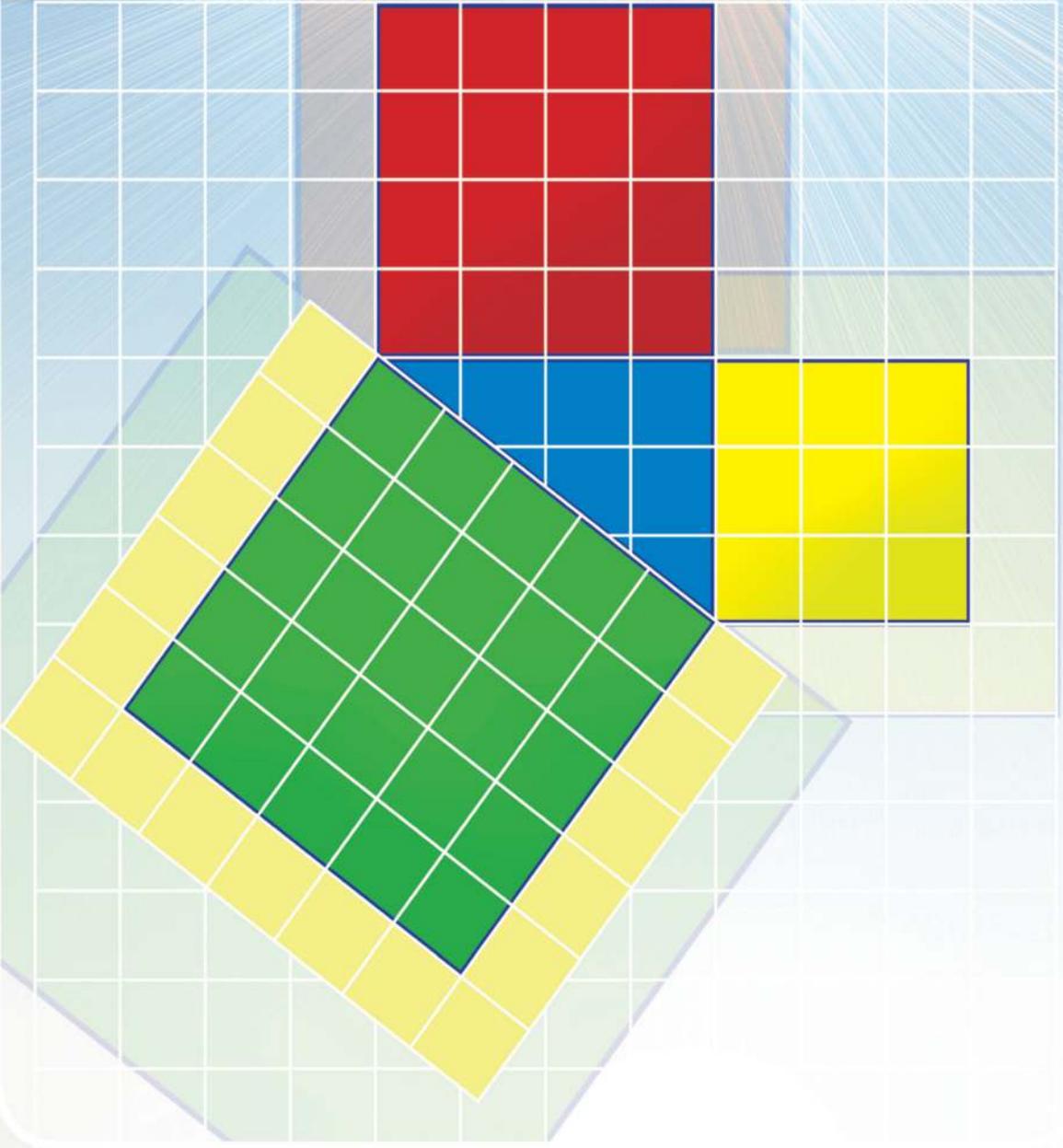
$$\text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{9+5}{2} \times 4$$

$$= 4 \times 7 = 28 \text{ سم}^2$$

لمزيد من التدريبات يرجى
الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



التشابه
وعكس فيثاغورث واقليدس



الوحدة الخامسة الدرس الأول

التشابه

فكر وناقش

سوف تتعلم

مفهوم التشابه.

متى يتشابه مضلعان.

متى يتشابه مثلثان.

مصطلحات أساسية

تشابه.

أطوال متناسبة.

زوايا متناظرة.

في قاعة التطوير التكنولوجي ، وأثناء عرض تمارين وتطبيقات على التحويلات الهندسية .

قال أسامة:

الانعكاس والانتقال والدوران هو تساوي قياسي ، لأن الشكل وصورته متطابقان، فيكون لهما نفس قياسات الأضلاع المتناظرة، ونفس قياسات الزوايا المتناظرة.

قال أحمد:

رسوم التمارين على شاشة العرض مشابهة للواقع، لهما نفس قياسات الزوايا، ولكن الأطوال مكبرة بنسبة ثابتة.

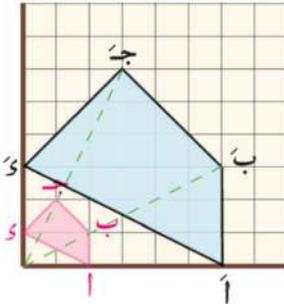
هل المضلع أ ب ج د يشابه المضلع س ص ع ل؟ ولماذا؟

تعريف

يقال لمضلعين إنهما متشابهان إذا تحققت مايلي:

○ زواياهما المتناظرة متساوية في القياس.

○ أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.



مثال



في الشكل المقابل

$$\frac{3}{6} = \frac{أ س}{أ ب} = \frac{ج د}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج} = \frac{أ ب}{أ ب}$$



$\triangle(أ) = \triangle(أ)$ ، $\triangle(أ) = \triangle(ب)$ ، $\triangle(أ) = \triangle(ب)$ ،
 $\triangle(ج) = \triangle(ج)$ ، $\triangle(ج) = \triangle(أ)$ ، $\triangle(ج) = \triangle(أ)$
 ∴ الشكل أ ب ج يشابه الشكل أ ب ج

لاحظ أن:

- 1 يجب كتابة المضلعين المتشابهين بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة. فيكون الشكل أ ب ج يشابه الشكل أ ب ج ونستخدم العلامة (≈) للتعبير عن التشابه فنكتب الشكل أ ب ج ~ الشكل أ ب ج.
- 2 تسمى النسبة الثابتة بين أطوال الأضلاع المتناظرة بنسبة التكبير أو مقياس الرسم. لاحظ أن: إذا كانت نسبة التكبير = 1 فإن المضلعين يتطابقان.
- 3 كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟
- 4 إذا تشابه مضلعان فإن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.



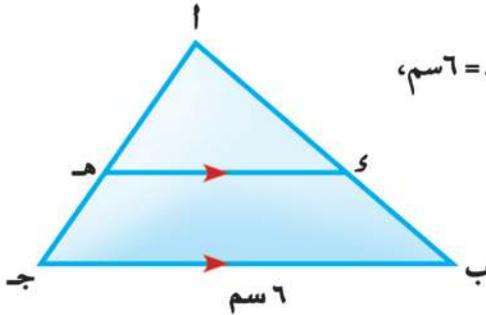
فكر المربع والمستطيل لا يتشابهان رغم تساوي قياسات زواياهما ... لماذا؟
 المربع والمعين لا يتشابهان رغم تناسب أطوال أضلعهما المتناظرة ... لماذا؟

تشابه المثلثين

تعريف

يتشابه المثلثان إذا توفّر أحد الشرطين التاليين:
 ○ الزوايا المتناظرة متساوية في القياس. ○ أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.

مثال



في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث فيه أ ب = 5 سم، ب ج = 6 سم،
 أ د = 4 سم، د ع = 3 سم، حيث $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{هـ\}$ ،
 أ برهن أن $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.
 ب أوجد طول كل من \overline{DE} ، \overline{AD}



الحل

$$\therefore \overline{و ه} // \overline{ب ج}$$

$\therefore \triangle (أ ه و) = \triangle (ب و ه)$ ، $\triangle (أ ه و) = \triangle (أ ه و)$ لماذا؟

$\therefore \triangle$ مشتركة في كل من المثلثين $أ ه و$ ، $أ ب ج$

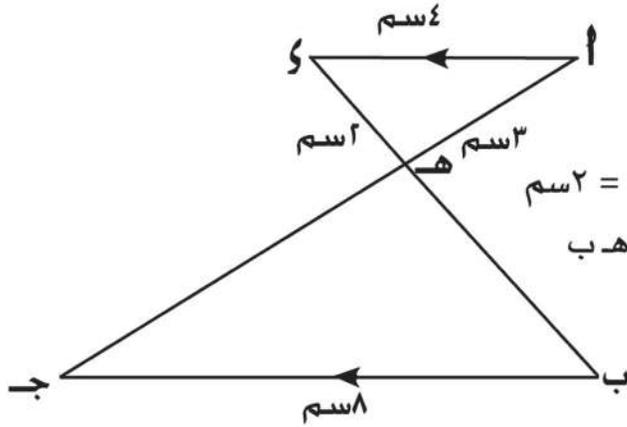
$\therefore \triangle أ ه و \sim \triangle أ ب ج$ لتساوي قياسات الزوايا المتناظرة ، وينتج أن:

$$\frac{أ ه}{ه و} = \frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ و}{أ ج} \therefore \frac{أ ه}{ه و} = \frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ و}{أ ج}$$

$$ه و = \frac{6 \times 3}{4} = 4.5 \text{ سم} ، أ ه = \frac{4 \times 3}{4} = 3 \text{ سم}$$



مثال (٢)



$\overline{أ ب} // \overline{أ ج}$ ، $أ و = ٤ \text{ سم}$ ،

$ب ج = ٨ \text{ سم}$ ، $أ ه = ٣ \text{ سم}$ ، $ه و = ٤ \text{ سم}$

أولاً: أثبت أن $\triangle أ ه و \sim \triangle أ ب ج$

ثانياً: أوجد محيط $\triangle ه ب ج$

البرهان

$$\therefore \overline{أ و} // \overline{ب ج}$$

$\therefore \triangle (أ و ب) = \triangle (أ ج و)$ ، $\triangle (أ و ب) = \triangle (أ و ب)$

$\therefore \triangle (أ ه و) = \triangle (أ ب ج)$

$\therefore \triangle أ ه و \sim \triangle أ ب ج$

$$\therefore \frac{أ ه}{ه و} = \frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ و}{أ ج}$$

بالتعويض عن أطوال الأضلاع المعلومة

$$\therefore \frac{٤}{ه و} = \frac{٣}{ب ج} = \frac{٦}{٨}$$

$\therefore ه و = ٤ \text{ سم}$ ، $ب ج = ٦ \text{ سم}$

\therefore محيط $ه ب ج = ٤ + ٦ + ٨ = ١٨ \text{ سم}$

بالتبادل

بالتقابل بالرأس

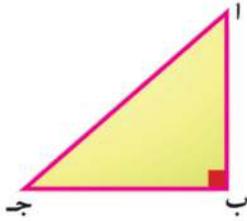


لمزيد من التدريبات يرجى
الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



عكس نظرية فيثاغورث

فكر وناقش



علمنا من نظرية فيثاغورس أنه إذا كان $أ ب ج$ مثلث قائم الزاوية في $ب$ فإن:
 $أ^2 = ب^2 + ج^2$
 والآن سوف ندرس عكس نظرية فيثاغورس.

عكس نظرية فيثاغورس:

سوف تتعلم

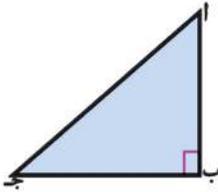
- عكس نظرية فيثاغورس.
- استخدام نظرية فيثاغورس في حل المسائل.

إذا كان مجموع مساحتي المربعين المنشأين على ضلعين في مثلث يساوي مساحة المربع المنشأ على الضلع الثالث، كانت الزاوية المقابلة لهذا الضلع قائمة.

أي أن: في $\Delta أ ب ج$ إذا كان: $أ^2 = ب^2 + ج^2$

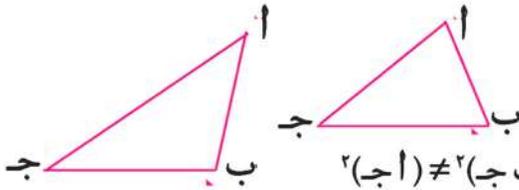
فإن: $\angle ب = 90^\circ$

ويكون المثلث قائم الزاوية في $ب$



ويمكن صياغة عكس نظرية فيثاغورس كما يلي:

إذا كان مربع طول ضلع في مثلث يساوي مجموع مربعي طولى الضلعين الآخرين كانت الزاوية المقابلة لهذا الضلع قائمة.



نتيجة:

في المثلث $أ ب ج$ إذا كان:

$أ^2 > ب^2 + ج^2$ وكان الأضلاع طولاً وكان

فإن: $\Delta أ ب ج$ لا يكون قائم الزاوية.



لمزيد من
التدريبات يرجى
الدخول على موقع
الوزارة الإلكتروني



سوف تتعلم

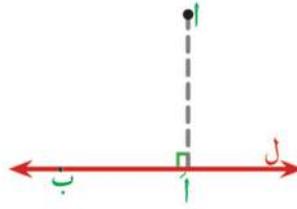
- ✎ إيجاد مسقط نقطة على مستقيم.
- ✎ إيجاد مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم.
- ✎ إيجاد مسقط شعاع على مستقيم.
- ✎ إيجاد مسقط مستقيم على مستقيم.

مصطلحات أساسية

- ✎ مسقط.
- ✎ نقطة.
- ✎ قطعة مستقيمة.
- ✎ شعاع.
- ✎ خط مستقيم.

عندما تسقط قطعة طباشير من يدك: هل تسقط رأسيًا لاسفل (عمودية على الأرض)؟
ما الأثر الذي تتركه قطعة الطباشير على الأرض؟

مسقط نقطة على مستقيم



في الشكل المقابل:

ل مستقيم، أ، ب نقطتان، حيث $أ \notin ل$ ،
ب $\in ل$.

نرسم $أأ \perp ل$ حيث $أ \in ل$.

تسمى النقطة أ (وهي موقع العمود المرسوم من النقطة أ على المستقيم ل) بالمسقط العمودي للنقطة أ على المستقيم ل.

$ب \in ل$ ∴ مسقط ب على المستقيم ل هو نفس النقطة ب.

لاحظ أن:

مسقط نقطة على مستقيم هو موقع العمود المرسوم من هذه النقطة على المستقيم.

إذا كانت النقطة تقع على المستقيم فإن مسقطها على هذا المستقيم هو نفس النقطة.



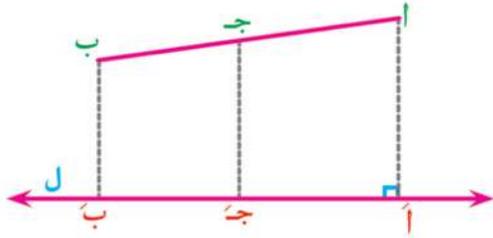
مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم

لإيجاد مسقط القطعة المستقيمة \overline{AB} على المستقيم l .

إذا كانت A مسقط A على المستقيم l

B' مسقط B على المستقيم l

فإن: مسقط \overline{AB} على المستقيم l هو $\overline{A'B'}$

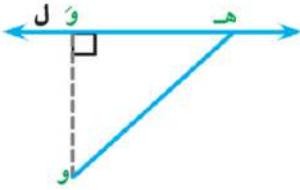


لاحظ أنه إذا كانت: $J \in \overline{AB}$ ، J' مسقط J على المستقيم l

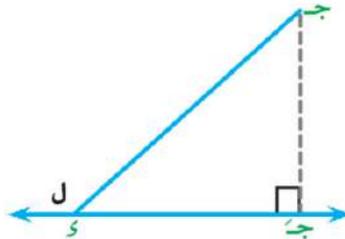
فإن: $J' \in \overline{A'B'}$

مثال :

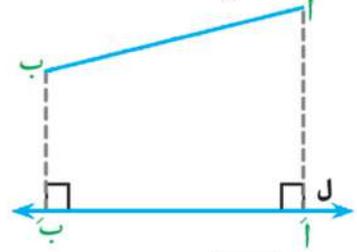
الأشكال التالية تُبين بعض القطع المستقيمة في أوضاعٍ مختلفةٍ، لاحظ مسقط القطعة المستقيمة في كل شكل :



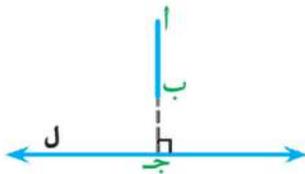
مسقط \overline{HO} على المستقيم l
هو $\overline{H'O'}$



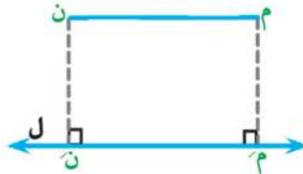
مسقط \overline{JS} على المستقيم l
هو $\overline{J'S'}$



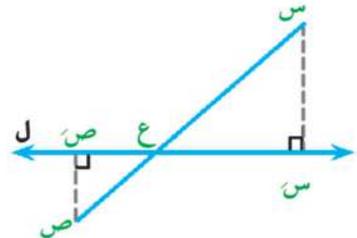
مسقط \overline{AB} على المستقيم l
هو $\overline{A'B'}$



مسقط \overline{AB} على المستقيم l
هو النقطة J



مسقط \overline{MN} على المستقيم l
هو $\overline{M'N'}$



مسقط \overline{SV} على المستقيم l
هو $\overline{S'V'}$

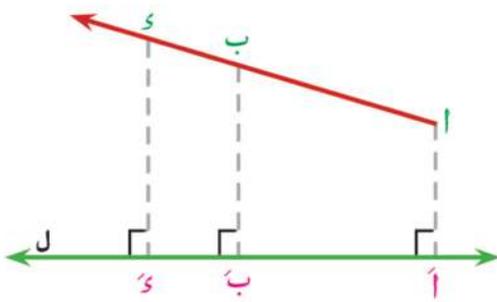


لاحظ وناقش:

- طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم يكون مساوياً أو أصغر من طول القطعة المستقيمة نفسها.
- متى يكون طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم مساوياً طول هذه القطعة المستقيمة؟
- متى يكون طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم صفرًا؟

مسقط شعاع على مستقيم

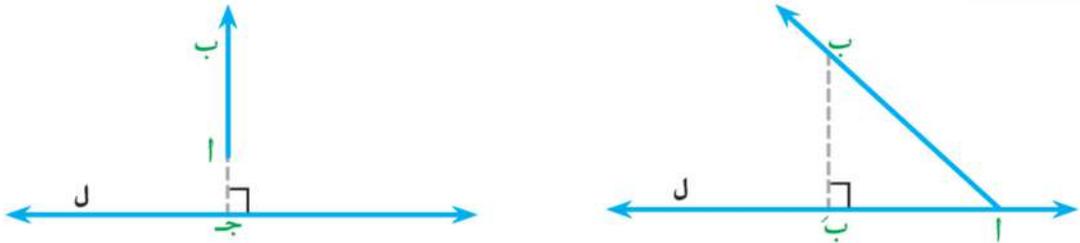
إيجاد مسقط \overrightarrow{AB} على المستقيم l



- لاحظ أن:
- مسقط A على المستقيم l
 - مسقط B على المستقيم l
- إذا كانت: $\exists \overrightarrow{AB} \perp l$ ، $\exists \overrightarrow{AB}$
- وكانت: \exists مسقط \overrightarrow{AB} على المستقيم l .
- فإن: $\exists \overrightarrow{AB} \perp l$

\therefore مسقط \overrightarrow{AB} على المستقيم l هو \overrightarrow{AB}

لاحظ أن:



مسقط \overrightarrow{AB} على المستقيم l هو \overrightarrow{AB} وإذا كان $\overrightarrow{AB} \perp l$ فإن مسقط \overrightarrow{AB} على المستقيم l هو نقطة J .

هيا نفكر

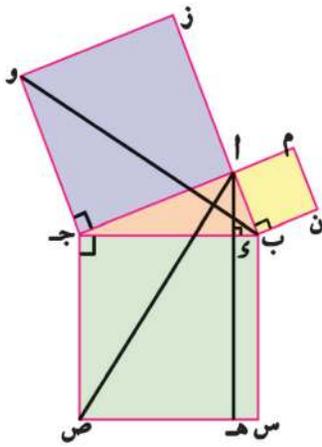
- ما مسقط مستقيم على آخر؟
- هل يمكن أن يكون مسقط مستقيم على آخر هو نقطة؟
- وضح إجابتك برسم أشكال مختلفة لمسقط مستقيم على آخر، واحفظها في كراستك.

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



نظرية إقليدس

فكر وناقش



الشكل المقابل:

١ أب ج مثلث قائم الزاوية في أ، المربعات أب ن م، أ ج و ز، ب س ص ج منشأة على أضلعه.

٢ رسم أ ك \perp ب ج قطعها في س، وقطع س ص في هـ، ورسمت ب و، أ ص كما بالشكل.

سوف تتعلم

نظرية إقليدس.

تطبيقات على نظرية

إقليدس.

لاحظ أن:

$$ق (\triangle ب ج و) = ق (\triangle ا ص ج ا)$$

لماذا؟ $\triangle ب ج و \equiv \triangle ا ص ج ا$

لماذا؟ مساحة $\triangle ب ج و = \frac{1}{2}$ مساحة المربع أ ج و ز

لماذا؟ مساحة $\triangle ا ص ج ا = \frac{1}{2}$ مساحة المستطيل هـ ص ج د

فيكون: مساحة المربع أ ج و ز = مساحة المستطيل هـ ص ج د

لماذا؟ $(ا ج)^2 = ج د \times ج ص$

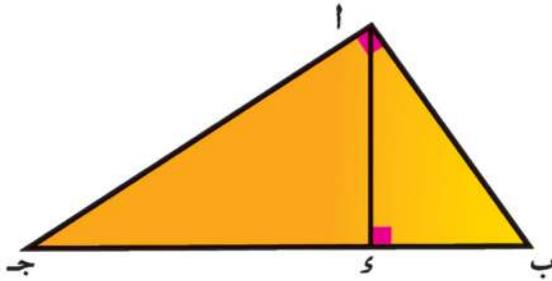
$\therefore (ا ج)^2 = ج د \times ج ب$

= طول مسقط أ ج \times طول الوتر ب ج



نظرية إقليدس:

مساحة المربع المنشأ على أحد ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي مساحة المستطيل الذي بُعده هو مسقط هذا الضلع على الوتر وطول الوتر.



أى أن: في المثلث $أب ج$ القائم الزاوية في $أ$ ،

إذا رسمت $أى$ \perp $ب ج$ **فإن:**

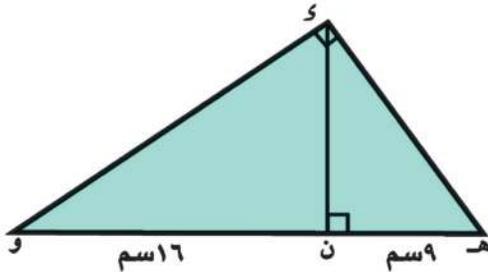
$$(ب أ)^2 = ب س \times ج س$$

$$(ج أ)^2 = ج س \times ب س$$

نتيجة:

$$(أ س)^2 = ب س \times ج س$$

فكر أثبت ان المثلثين $أوب$ ، $ح س$ متشابهان واستنتج ان $(أ س)^2 = ب س \times ج س$.



في الشكل المقابل:

$س هـ$ و مثلث قائم الزاوية في $س$ ، $كن$ \perp $هـ و$ ،
 $هن = ٩$ سم، $ن و = ١٦$ سم

الحل

$$(س هـ)^2 = هن \times هـ و$$

$$٢٥ = ٩ \times$$

$$(س و)^2 = ون \times وهـ$$

$$٢٥ = ١٦ \times$$

$$(س ن)^2 = ن هـ \times ن و$$

$$١٦ = ٩ \times$$

هيا نفكر

هل $كن \times هـ و = س هـ \times س و$ ؟ ولماذا؟

لمزيد من التدريبات
يرجى الدخول على
موقع الوزارة الإلكتروني

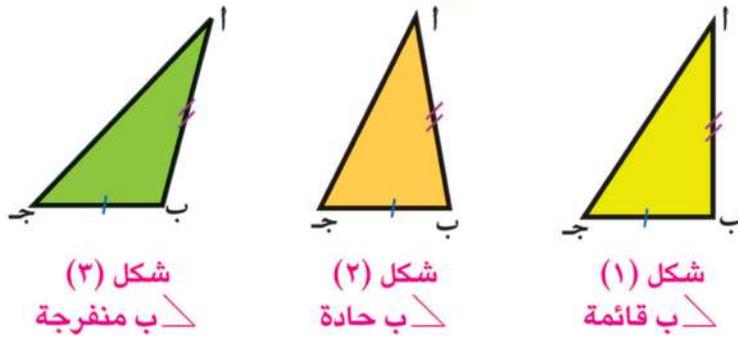


التعرف على نوع المثلث بالنسبة لزاوياه

الوحدة الخامسة الدرس الخامس

فكر وناقش

نشاط :



لاحظ أن: طول \overline{AB} متساوي في الأشكال الثلاثة.

طول \overline{BC} متساوي أيضًا في الأشكال الثلاثة.

هل يختلف طول \overline{AC} تبعًا لاختلاف نوع الزاوية المقابلة له؟

كرّر ذلك عدة مرات

في شكل (١) $\therefore \angle B = 90^\circ \therefore \angle C = 90^\circ - \angle A \therefore \angle C = 90^\circ - \angle A \therefore \angle C = 90^\circ - \angle A$
 في شكل (٢) $\therefore \angle B < 90^\circ \therefore \angle C = 90^\circ - \angle A \therefore \angle C > 90^\circ - \angle A \therefore \angle C > 90^\circ - \angle A$
 في شكل (٣) $\therefore \angle B > 90^\circ \therefore \angle C = 90^\circ - \angle A \therefore \angle C < 90^\circ - \angle A \therefore \angle C < 90^\circ - \angle A$
 متى يكون $\angle C = 90^\circ$ ؟

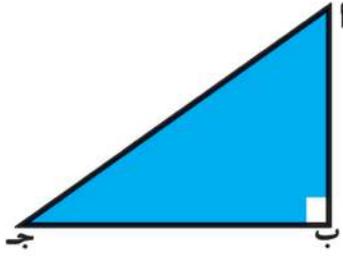
تحديد نوع المثلث بالنسبة لزاوياه متى علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

نقارن بين مربع طول الضلع الأكبر للمثلث و مجموع مربعي طولى الضلعين الآخرين:



أولاً: إذا كان:

مربع طول الضلع الأكبر يساوي مجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم الزاوية.

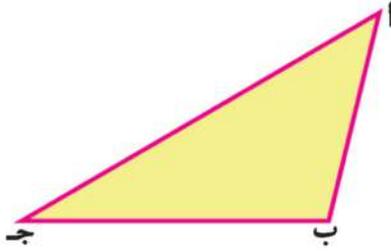


في \triangle أ ب ج: $(أج)^2 = (أب)^2 + (بج)^2$

∴ \triangle ب قائمة

ثانياً: إذا كان:

مربع طول الضلع الأكبر < مجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين فإن المثلث يكون منفرج الزاوية.

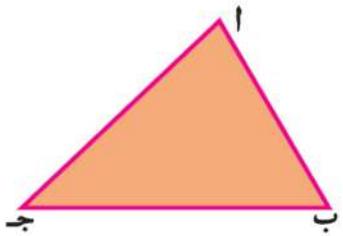


في \triangle أ ب ج: $(أج)^2 < (أب)^2 + (بج)^2$

∴ \triangle ب منفرجة

ثالثاً: إذا كان:

مربع طول الضلع الأكبر > مجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين فإن المثلث يكون حاد الزوايا.



في \triangle أ ب ج: $(أج)^2 > (أب)^2 + (بج)^2$

∴ \triangle ب حادة والمثلث حاد الزوايا. لماذا؟

مثال (١)



حدد نوع الزاوية التي لها أكبر قياس في المثلث أ ب ج ، حيث:

أ ب = ٨ سم ، ب ج = ١٠ سم ، ج أ = ٧ سم

وما نوع هذا المثلث بالنسبة لزاويه؟

الحل

∴ أكبر زوايا المثلث قياسا تقابل أكبر الأضلاع طولا.

∴ \triangle أ هي أكبر زوايا المثلث أ ب ج في القياس لأنها تقابل الضلع ب ج

$$(ب ج)^2 = (١٠)^2 = ١٠٠$$



$$(أب)^2 + (أج)^2 = 7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$$

∴ ∠أ حادة

∴ (بج) > (أب) + (أج)
∴ ∠أ هي أكبر زوايا المثلث

∴ ∠أ ب ج حاد الزوايا.

مثال (٢)



اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

(١) ∠أ ب ج فيه (أب) + (بج) > (أج) فإن ∠ب تكون

(حادة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)

(٢) ∠أ ب ج منفرج الزوايا في أ فيه أب = ٥ سم، ب ج = ٨ سم فإن أ ج =

(٥ سم، ٧ سم، ٨ سم، ١٣ سم)

(٣) ∠س ص ع فيه (س ع) = (ص ع) - (س ص) فإن س تكون زاوية

(حادة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)

(٤) في ∠أ ب ج إذا كان (أج) + (بج) = (أب) - ٥ فإن ∠ج تكون زاوية

(حادة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)

(٥) المثلث المتساوي الساقين الذى طولاً ضلعين فيه ٣ سم ، ٤ سم تكون أكبر زواياه

(حادة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)

الحل

(١) منفرجة

(٣) قائمة

(٥) حادة

(٢) ٥

(٤) منفرجة



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

قام بفهرسة هذه النسخة ورفعها :

د محمد أحمد محمد عاصم

نسألکم الدعاء