مشروع الدراسات
والبحوث العلمية

الدكتور هشام غصيب

مدخل مبسط إلى مفهوم

الحركة الموجية

المنظمة الإسلامية للتربية والعلوم والثقافة

الجمعية العلمية الملكية

محسن ابو يوسف اللويثي

مدخل مبسط إلى مفهوم

الحركة الموجية

بسم الله الرحمن الرحيم

حسين سليموس
اوترخت - هولندا
ديسمبر 1992م

مدخل مبسط إلى مفهوم

الحركة الموجية

الدكتور هشام غصيب

الجمعية العلمية الملكية

محسن أبو يوسف الدويشي

منشورات قسم الثقافة العلمية - الجمعية العلمية الملكية

مشروع الدراسات والبحوث العلمية
قسم الثقافة العلمية
الجمعية العلمية الملكية
عمّان - الأردن

حسن ابو يوسف اللوبشي

الطبعة الأولى
١٤١١هـ - ١٩٩١م

الجمعية العلمية الملكية
ص.ب ٩٢٥٨١٩ - عمّان - الأردن

المنظمة الإسلامية للتربية والعلوم والثقافة (إيسيسكو)
ص.ب 755 الرباط - المغرب

تقديـــم
مدير عام المنظمة الإسلامية للتربية والعلوم والثقافة (إيسيسكو)

المنظمة الإسلامية للتربية والعلوم والثقافة (إيسيسكو) هيئة دولية تعمل في إطار منظمة المؤتمر الإسلامي وتختص في ميادين التربية والعلوم والثقافة. ومن بين أهدافها الأساسية تقوية التعاون بين الدول الأعضاء في حقول اختصاصها، والنهوض بمستوى تدريس العلوم، وتشجيع استعمال التكنولوجيا المتطورة في إطار القيم والمثل العليا الإسلامية الثابتة، والحفاظ على معالم الحضارة الإسلامية وخصوصياتها المتميزة، وتعميق التفاهم بين الشعوب، بالإضافة إلى المساهمة في إقرار الأمن والسلم في العالم عن طريق التربية والثقافة بصفة خاصة.

وتشمل الخطة الثلاثية للإيسيسكو 1985-1988 ضمن برامجها العلمية، برنامج عل/ 3 الذي يقضي بتقديم الدعم للمجامع العلمية الوطنية والمؤسسات والجمعيات لتشجيع الأنشطة الهادفة إلى تعزيز العلوم وتعميمها. وقد عقدت الإيسيسكو في إطار هذا البرنامج اتفاقا مع الجمعية العلمية الملكية بعمان بالمملكة الأردنية الهاشمية في شهر أكتوبر 1986 ينص على إعداد أربعة كتب للناطقين باللغة العربية غير المتخصصين في المواضيع الآتية:

1- الحاسوب
2- سيرورة التوحيد في فيزياء المجال
3- الحركة الموجية
4- رحلات الفضاء.

كما ينص الاتفاق على استغلال عائدات مبيعات هذه الكتب في إنتاج كتب أخرى حول المواضيع العلمية.

ويعد إنجاز هذا العمل تعبيرا عن اهتمام كل من المنظمة الإسلامية والجمعية العلمية الملكية بتعميم العلوم في العالم الإسلامي.

وإنه لمن دواعي سعادة المنظمة الإسلامية –إيسيسكو– أن تمول إنتاج هذا الكتاب الموسوم بـِ «مدخل مبسط إلى مفهوم الحركة الموجية». كما يسرها أن تعبر عن تقديرها للجهود التي بذلتها الجمعية العلمية الملكية في إعداده وطبعه.

الأستاذ عبد الهادي بوطالب

المدير العام للإيسيسكو

تقديـــم
رئيس الجمعية العلمية الملكية

تقوم الجمعية العلمية الملكية، ممثلة بقسم الثقافة العلمية فيها، منذ بضع سنوات بإنتاج كتب علمية على شتى المستويات، ابتداء بمستوى الطفل ومروراً بمستوى القارىء العادي وانتهاء بمستوى الباحث العلمي. وتهدف الجمعية من ذلك إلى المساهمة الفعالة في ترسيخ المنهجية والاتجاهات والقيم وأنماط السلوك العلمية في مجتمعنا النامي، انسجاماً مع خطط التنمية المحلية والإقليمية والدولية. كما تهدف إلى المساهمة في إحياء اللغة العربية حضارياً بتحرير الطاقات التعبيرية العلمية الوافرة الكامنة فيها، وإلى بناء مكتبة علمية عربية رصينة تفي بالمتطلبات الحضارية، الروحية والمادية، للأمة، وتشكل قاعدة أساسية لعملية التعريب الشاملة التي لا غنى عنها لعمليتي التحديث والتنمية الحضارية.

وبالنظر إلى هذه الأهداف، وإلى الطبيعة البحثية للجمعية العلمية الملكية، فقد عمدت الجمعية إلى التركيز على التأليف في إعداد النصوص العلمية، لما يعود به التأليف من نفع على الممارسة العلمية المحلية ذاتها وما يؤديه من دور جوهري في تشكيل جماعة علمية محلية. فباشرت منذ سنوات بإصدار سلسلة من الدراسات المؤلفة في علوم الطبيعة غايتها المساهمة في تحديث الثقافة العربية عن طريق المساهمة في بناء بعدها العلمي وإبراز المضمون الفكري والحضاري للممارسة العلمية الحديثة. وتعنى هذه السلسلة بصورة خاصة بإعادة تركيب لحظات التطور الرئيسية للفكر العلمي، بالرجوع إلى المنشورات الأصلية التي تبلورت فيها هذه اللحظات. وهي محاولة للمساهمة في التعويض عما أصاب الوجدان الحضاري العربي من ضرر من جرّاء السبات العلمي العميق الذي غاب فيه هذا الوجدان في القرون الخمسة الأخيرة.

وقد تفضلت بعض الجهات مشكورة بتقديم الدعم المادي لإنتاج بعض الكتب التابعة إلى هذه السلسلة. وكان في مقدمتها المنظمة الإسلامية للتربية والعلوم والثقافة

(إيسيسكو)، التي قدمت الدعم المادي، وفق اتفاقية تعاون عقدتها مع الجمعية العلمية الملكية في أكتوبر ١٩٨٦، لإنتاج أربعة كتب علمية ضمن السلسلة المذكورة تعالج الموضوعات الآتية:

١ - الحاسوب،
٢ - سيرورة التوحيد في فيزياء المجال،
٣ - الحركة الموجية،
٤ - رحلات الفضاء.

ويعد هذا الدعم وهذه الاتفاقية تعبيراً واضحاً عن الدور الذي تسعى إلى أدائه كل من المنظمة الإسلامية للتربية والعلوم والثقافة والجمعية العلمية الملكية في نشر الفكر العلمي ورفد عملية التثقيف العلمي في المنطقة. والجمعية، إذ تتوجه بالشكر والتقدير للمنظمة لهذا الدعم الكريم، ليحدوها الأمل في أن يكون هذا التعاون المثمر بداية لتعاون أشمل وأعم يخدم أمتنا الاسلامية ويساهم في تحقيق أغراضها التنموية واستعادتها لمكانتها العلمية المرموقة بين الأمم.

والله نسأل السداد والتوفيق.

د. هانـي الملقـي
رئيس الجمعية العلمية الملكية

المحتويـــات

حسن يوسف اللويشي

□ الفصل الثالث : من الاهتزازات إلى الأمواج

□ الفصل الرابع: الأنماط الاهتزازية والأمواج في الأنظمة المادية

□ الفصل الخامس: مدخل مبسط إلى معادلة شرودنغر الموجية

مقدمـة المؤلـف

تعد الحركة الموجية شكلاً رئيسياً من أشكال الحركة الجاهرية Macroscopic يتميز بأن انتقال الطاقة فيه يتم من دون أن يصاحبه بالضرورة انتقال للكتلة. كما أنها تعد سمة أساسية من سمات حركة الجسيْمات المجهرية Microscopic. لكن الكثيرين يجدون صعوبة استثنائية في فهم هذه الحركة المهمة بالنظر:

(١) إلى الطبيعة المركبة لهذه الحركة، حيث إن الموجة هي في صميمها مجموعة لانهائية من الاهتزازات المتصلة والمترابطة،

(٢) إلى صعوبة تصور انتقال الطاقة في نقائها وبمعزل عن انتقال مناظر للكتلة.

ويهدف هذا الكتاب إلى توضيح مفهوم الحركة الموجية ببيان علاقته الوثيقة مع مفهوم الحركة الدورية Periodic Motion بعامة، ومفهوم الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion بخاصة.

إذ يبدأ الكتاب في الفصل الأول بتعريف الحركة الدورية بدلالة مفهوم موضع الاتزان Equilibrium Position، ثم «يشتق» من هذا التعريف الطبيعة الرياضية للحركة الدورية، ليصل إلى الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion بوصفها أبسط حركة دورية. بعد ذلك يناقش الكتاب خصائص هذه الحركة ويسخرها لإلقاء الضوء على الخصائص الرئيسية للحركة الموجية.

وفي الفصل الثاني، يتناول الكتاب نظماً مادية ومخبرية معينة لبيان طبيعة الحركة التوافقية البسيطة وأهميتها العملية.

وفي الفصل الثالث، يبين الكتاب كيفية الانتقال من الحركة التوافقية البسيطة إلى الحركة الموجية في أبسط صورها عن طريقين: (١) اعتبار ثابت طور Phase Constant الحركة التوافقية البسيطة، (٢) اعتبار اتساع Amplitude هذه الحركة متغيرَيْن في المكان بصورة متصلة Continuous ودورية Periodic. وتقودنا الطريقة الأولى إلى الأمواج الجيبية

المنتقلة Travelling البسيطة، فيما تقودنا الثانية إلى الأمواج الموقوفة Standing Waves. وتقودنا الأمواج الموقوفة بدورها إلى معالجة نظرية مستفيضة بعض الشيء لمفهوم الأنماط الاهتزازية Vibrational Modes وإلى كل من مفهوم علاقات التشتت Dispersion Relations ومفهوم سرعة الزمرة Group Velocity.

أما الفصل الرابع، فيعنى بالأنماط الاهتزازية كما تتجلى في نظم مادية نمطية، ويبين كيفية الانتقال من الأنماط الاهتزازية إلى الأمواج الموقوفة بخاصة والحركة الموجية بعامة. وتقودنا هذه المعالجة إلى معادلة كلاين - غوردن Klein-Gordon Equation، والتي تصف سلوك البوزونات Bosons على الصعيد النووي. كما تقودنا إلى الأمواج المستعرضة Transverse Waves في الأوتار المتصلة وخصائصها الرئيسية.

ويشكل الفصل الأخير (الخامس) مدخلاً مبسطا إلى معادلة شرودنغر الموجية Schrodinger Wave Equation والكيفية التي تنبع بها من المزاوجة بين البصريات الموجية Wave Optics والميكانيكا الكلاسيكية.

ويلاحظ أن الكتاب اقتصر على النظم المادية ذات البعد المكاني الواحد، فلم يتطرق إلى النظم المتعددة الأبعاد، حتى في معالجته معادلة شرودنغر الموجية. والسبب في ذلك هو أن الكتاب لا يهدف إلى التغطية الشاملة للموضوع ولا إلى المعالجة التفصيلية، وإنما يهدف إلى بيان الجوهر الفيزيائي لمفهوم الحركة الموجية وعلاقاته الجوهرية مع غيره من المفهومات في أبسط صورة دقيقة ممكنة. فالتفصيلات الواردة في الكتاب كلها مسخر لبيان هذا الجوهر وتعزيز فهمه في عيانيته، فهي لا ترد لذاتها.

والقصد من الكتاب تزويد طالب الفيزياء والهندسة بأرضية مفاهيمية صلبة ينطلق الطالب منها لفهم التفصيلات والتطبيقات، والتي قد نعالجها في كتب لاحقة. وبصورة خاصة، فقد نعالج مستقبلاً الاهتزازات القسرية Forced Vibrations، والاهتزازات والأمواج المخمدة Damped Vibrations and Waves، والأمواج الصوتية، والأمواج المائية، والأمواج «الأثيرية»، والأمواج الكهرَمغناطيسية، وأمواج شرودنغر، والأمواج الصدمية Shock Waves، مركزين على خصائص موجية عامة كالتداخل Interference والحيود Diffraction والاستقطاب Polarization.

وأخيراً، فإني أشكر السيد محمود عويضة من قسم الثقافة العلمية في الجمعية العلمية الملكية لتنفيذه رسومات الكتاب وأشكالها.

د. هشام غصيب

عمان، ١٩٩٠

الفصـــل الأول

الحركة التوافقية البسيطة وخصائص الأمواج

(١ , ١) الاتـــزان

يمكن القول أن الأمواج المادية هي اهتزازات Vibrations ميكانيكية أو مجالية تنتقل في المكان، بمعنى أنها تغيرات دورية في كميات ميكانيكية أو مجالية تنتقل من موضع مكاني إلى آخر. بذلك، فإذا أردنا أن نفهم الأمواج ونستوعب مفهومها، فعلينا أولاً أن نفهم الاهتزازات ونستوعب مفهومها، ثم نمضي إلى تدبر الكيفية التي تجتمع بها الاهتزازات الموضعية لتكوين الأمواج وخصائص ما ينتج عن هذا الاجتماع، وبعد ذلك ندرس الكيفية التي تتفاعل بها الأمواج مع بعضها ومع الجسيْمات والأجسام المادية بدلالة هذه الخصائص. فاللبنة الأساسية في مفهوم الأمواج، إذاً، هي الاهتزازات الموضعية. وهذه الأخيرة ترتبط ارتباطاً وثيقاً بمفهوم الاتزان Equilibrium، حيث إن فهمها يظل سطحياً ومقتصرا على صعيد الكينماتيكا من دون مفهوم الاتزان. فلنبدأ إذاً بمفهوم الاتزان الميكانيكي.

يفيد الاتزان الميكانيكي الاستقرار من نوع أو آخر. أما الاستقرار في الميكانيكا، فيفيد نوعاً من توازن القوى المؤثرة على جسم. فهل نفهم من ذلك أن الاتزان الميكانيكي هو الحالة التي يكون فيها صافي القوى المؤثرة على جسم مادي صفراً، وأن موضع الاتزان هو الموضع الذي تسود فيه هذه الحالة؟ بيْد أن تدبر أمثلة بسيطة من الحياة العملية كفيل بإقناعنا بأن هذا الشرط ليس كافياً، وإن كان ضرورياً. وعلى سبيل المثال، فإذا قارنّا حالة شخص يقف على سطح مستوٍ بثبات مع حالة شخص يقف على حبل مشدود معلق في الهواء بين نقطتين على الارتفاع ذاته من سطح الأرض، تبيّن لنا

أن صافي القوة المؤثرة يساوي صفراً في كلتا الحالتين. لكن من الواضح أن حالة الشخص الواقف على الحبل المشدود لا تفيد الاستقرار، بعكس حالة الشخص الواقف على الأرض المستوية، ومن ثم فإن الأخير هو في حالة اتزان، أما الأول فهو ليس في حالة اتزان برغم توازن القوى المؤثرة عليه. كذلك، فإذا تدبّرنا سطحاً متعرجا وأهملنا الاحتكاك، تبيّن لدينا أن القوى المؤثرة (قوة الجاذبية ورد فعل السطح في هذه الحال) لا تتوازن بحيث يساوي صافيها صفراً إلا عند القيعان والقمم. بيْد أن الأجسام لا تكون مستقرة عند القمم، لكنها تكون مستقرة عند القيعان. فأي دفعة صغيرة للأجسام الموجودة على القمم تبعدها عن هذه المواضع وتجعلها تتدحرج حتى تستقر في القيعان. أما الاجسام الموجودة في القيعان، فهي تحتاج إلى دفعات قوية جداً لكي تبعدها عنها وتمنع عودتها إليها. من الواضح إذاً أن شرط توازن القوى هو شرط ضروري للاتزان الميكانيكي، لكنه ليس كافياً. فما هي الشروط الأخرى للاتزان؟

إذا أنعمنا النظر في المثالين المطروحين وفي غيرهما من الأمثلة، وجدنا أن مواضع الاتزان هي المواضع التي تصل فيها طاقة الوضع إلى حدها الأدنى، وهذه السمة هي التي تميزها بالفعل عن المواضع الأخرى التي تتوازن فيها القوى. فالاستقرار الحقيقي لا يتأتى إلا من هذا الشرط، شرط كون طاقة الوضع عند حدّها الأدنى. ويرتبط هذا الشرط بالموانع والقيود التي يفرضها قانون حفظ الطاقة على الحركة. فهذا القانون يمنع التغير العفوي في مواضع الاجسام التي تكون فيها طاقة الوضع عند حدودها الدنيا، حيث إن حدوث مثل هذه التغيرات يعني توليد طاقة حركة سالبة، وهو أمر غير ممكن. لذلك، فإن الاجسام الموجودة في مثل هذه المواضع تكون مستقرة بالفعل، ولا تبرح مواضعها إلا إذا أعطيت طاقة إضافية. وحتى عند اعطائها هذه الطاقة، فإنها لا تبرح مواضعها بالضبط، بل إنها تظل تتذبذب حول هذه المواضع حتى تفقد هذه الطاقة الإضافية. ذلك أن الطاقة الإضافية المعطاة، إذا لم تتجاوز حداً معينا، تمكن هذه الأجسام من التحرك والوصول إلى مواضع أخرى لا تشكل مواضع اتزان، بمعنى أن الأجسام لا تكون مستقرة عندها. لذا، فما إن تصل إليها وتستنفد طاقة حركتها كليا، حيث تتحول إلى طاقة وضع، حتى تعود القهقرى إلى مواضع الاتزان التي انطلقت منها. لكنها لا تستقر هناك بالطبع، حيث إنها، عند وصولها إلى مواضع الاتزان، تكون طاقة وضعها الإضافية قد تحولت إلى طاقة حركة مساوية للطاقة الإضافية التي اكتسبتها قبيل بدء حركتها. لذا، فإنها تتخطى مواضع

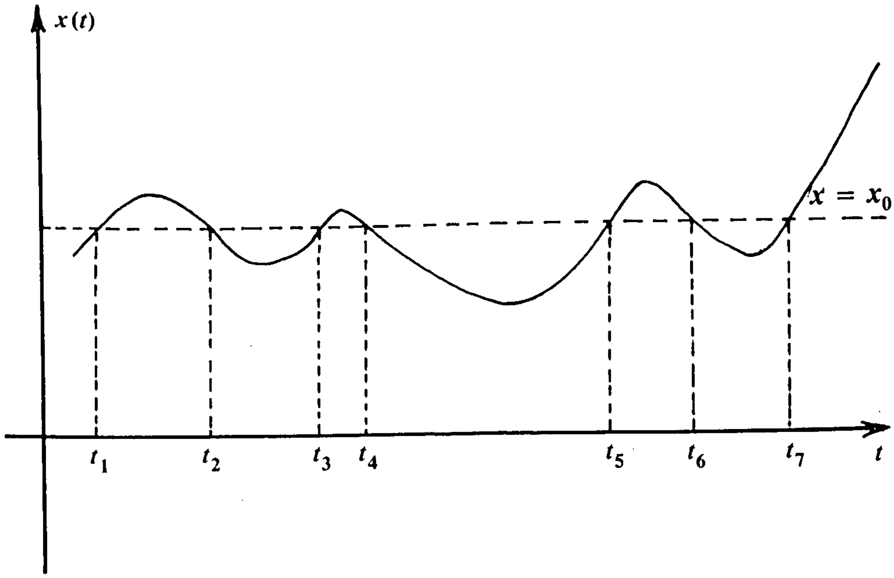
الاتزان وتستمر في الحركة نحو مواضع غير اتزانية على الجانب الآخر من القيعان حتى تصل إلى أعلى ارتفاع لها، ثم تعود القهقرى نحو مواضع الاتزان، وهلمّ جرّا إلى ما لا نهاية أو إلى أن تفقد هذه الطاقة الإضافية بصورة أو بأخرى. وهكذا، فإذا أبعدت الأجسام عن مواضع الاتزان ضمن مدى محدود، فإنها تنزع إلى العودة إلى هذه المواضع. وهذا ما لا يحدث في حال المواضع الأخرى التي تتوازن عندها القوى المؤثرة. فإذا أزيحت الأجسام الموجودة على القمم قليلاً عن مواضعها، فإنها تنزع إلى التدحرج بعيداً عن هذه المواضع، ولا تعود إلى هذه المواضع إلا إذا تعرّضت إلى تأثير مادي خارجي محدد من حيث المقدار والاتجاه كلاهما.

من ذلك يتضح أن موضع الاتزان الميكانيكي هو الموضع الذي تكون فيه طاقة الوضع عند حدها الأدنى. والحق أن هذا التعريف يتضمن شرط توازن القوى، لكنه يتضمن أيضاً شرطاً آخر يتعلق بالكيفية التي تتغير بها القوة مع الموضع. ويتضح أيضاً أن الأجسام الموجودة في مواضع الاتزان تنزع، عند تحركها، إلى التذبذب حول هذه المواضع، أي إلى التحرك بما يسمى الحركة الدورية Periodic Motion.

(١,٢) الحركــة الدوريــة

مما سبق يتضح أن الحركة الدورية الموضعية هي الحركة الناتجة عن العودة المتكررة للجسيْم المتحرك إلى موضع الاتزان. فالجسيْم في هذه الحال يظل يعود إلى موضع الاتزان ويمر فيه بين الفينة والأخرى. وقد يبدو للوهلة الأولى أن هذا التعريف يستثني نمطا أساسيا من أنماط الحركة الدورية، أعني حركة الجسيْمات حول مواضع الاتزان في منحنيات مغلقة (كالحركة الدائرية والحركة الإهليلجية). لكن كما سنبين لاحقا، فإن هذا النمط هو في حقيقته مزيج متجهي Vector Combination من الحركات الواردة في التعريف، ومن ثم فإنه ينضوي في النهاية تحت راية هذا التعريف.

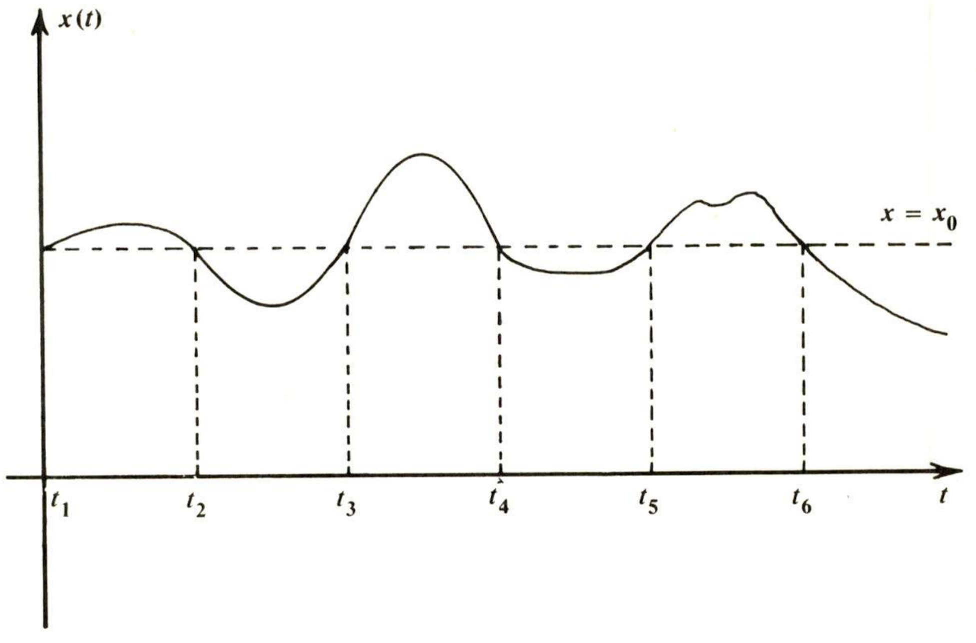
وبصورة عامة، فإنه يمكن تمثيل الحركة الدورية في بعد واحد على النحو الآتي:



الشكل (١ , ١) – الحركة الدورية في بعد واحد

ويلاحظ من الشكل (١ , ١) أن الجسيْم المتحرك يعود بصورة متكررة إلى الموضع (x_0)، وهو موضع الاتزان. ويلاحظ أيضاً أن الشيء الوحيد الذي يتكرر في هذه الحالة العامة هو العودة إلى موضع الاتزان. أما شكل العودة وزمنها فإنهما يتغيران من دورة إلى أخرى. فشكل المنحنى بين (t_2) ، (t_1) يختلف عنه بين (t_3)،(t_2) ، كما أن الفترة $(t_2 - t_1)$ لا تساوي الفترة $(t_3 - t_2)$. وكذا الحال بالنسبة إلى باقي الفترات.

هذه حالة عامة بالطبع. بيد أنه في كثير من الأحيان، تكون الحركة الدورية أحادية الفترة، بحيث إن الفترات $(t_2 - t_1)$، $(t_3 - t_2)$، $(t_4 - t_3)$ ، $(t_5 - t_4)$، $(t_6 - t_5)$.......... جميعا تكون مساوية لبعضها، من دون أن تكون أشكال العودة بالضرورة مماثلة لبعضها، وذلك على النحو الآتي:



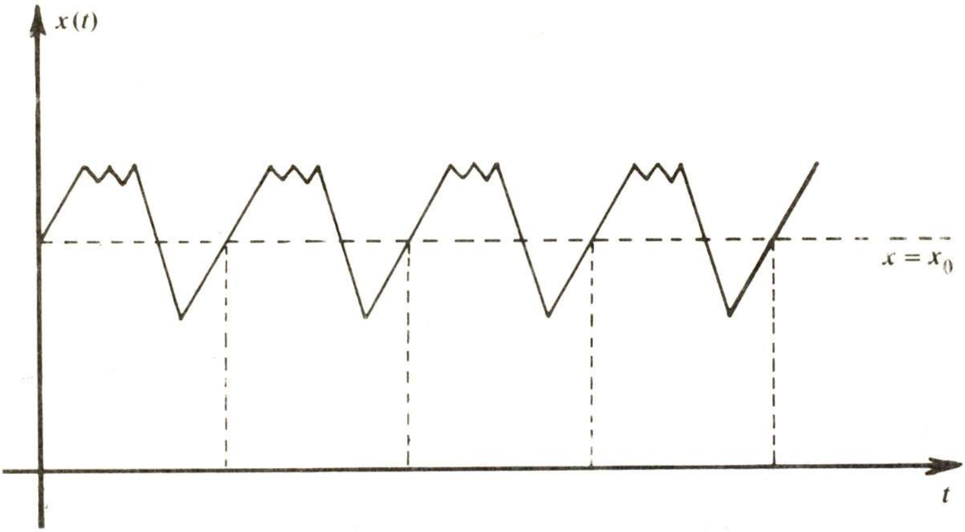
الشكل (٢ , ١) – حركة دورية أحادية الفترة

ففي هذه الحال، فإن دورية الحركة تتحدد بفترة واحدة (T). وبصورة عامة، فإنه يمكن التعبير عن الحركة الدورية العامة المبينة في الشكل (١ , ١) بدلالة مزيج من عدد لامتناهٍ من مثل الحركات الدورية أحادية الفترة المبينة في الشكل (٢ , ١).

وهناك ضرب مميز من الحركات الدورية أحادية الفترة نصادفه كثيراً في علوم الطبيعة والعلوم التطبيقية ويعد مفهومه أداة رئيسية في تحليل الكثير من العمليات الأساسية في الطبيعة، وهو الضرب الذي تكون فيه أشكال العودة إلى مواضع الاتزان مماثلة لبعضها، بمعنى أن المنحنى يكرر الشكل ذاته دورياً، كما في الشكل (٣ , ١).

ويمكن التعبير رياضيا عن هذا الضرب من الحركة الدورية بالعلاقةالآتية:

$$x(t + T) = x(t) \qquad (1.1)$$



الشكل (٣، ١) – حركة دورية أحادية الفترة ودورية الشكل

ذلك أن قيمة الدالة (x) عند (t) تكرر ذاتها بعد مضي الفترة (T)، أي إن الدالة $x(t)$، تكتسب القيمة ذاتها عند ($t+T$)، فتحافظ بذلك على شكل منحناها في كل فترة .

وإذا تدبرنا دالة متصلة Continuous Function لها قدر معقول من الملوسة Smoothness، استطعنا أن نوسع الحد الأيسر من المعادلة (1.1) على النحو الآتي :

$$\left[x(t) + T\frac{dx(t)}{dt} + \frac{T^2}{2!}\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{T^3}{3!}\frac{d^3x(t)}{dt^3} + \cdots = x(t) \qquad (1.2)$$

ويمثل الحد الأيسر من المعادلة (1.2) متسلسلة Series لانهائية تعرف بمتسلسلة تيلر Taylor Series .

ويمكن التعبير عن المعادلة (1.2) على النحو الآتي :

$$\left[1 + T\frac{d}{dt} + \frac{T^2}{2!}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{T^3}{3!}\frac{d^3}{dt^3} + \cdots\cdots\right] x(t) = x(t) \qquad (1.3)$$

ولما كانت :

$$1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ... = e^y \qquad (1.4)$$

وذلك بالتعريف ، فإنه يمكن التعبير عن المعادلة (1.3) على النحو الآتي :

$$e^{T\frac{d}{dt}} x(t) = x(t + T) = x(t) \qquad (1.5)$$

ويتضح من المعادلة (1.5) أن $(e^{T\frac{d}{dt}})$ هو عامل إجراء Operator يعمل على إزاحة الزمن فترة معينة (T)، أي على نقل الأحداث في الزمان من (t) إلى $(T + t)$. لذلك، فإنه يسمى في الادبيات الفيزيائية عامل إجراء انتقالياً في الزمان Time-Translational Operator.

ولكن ماذا يترتب رياضيا على المعادلة (1.5)؟

للإجابة عن هذا السؤال ، نتدبر دالة اخرى $(y(t))$ تطيع المعادلة (1.5) ونركب دالة مركبة Complex Function $(z(t))$ من الدالتين الحقيقيتين Real Functions $(x(t))$، $(y(t))$، وذلك على النحو الآتي:

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (1.6)$$

حيث :

$$i = \sqrt{-1} \qquad (1.7)$$

$$z(t + T) = e^{T\frac{d}{dt}} z(t) = z(t) \qquad (1.8)$$

$$z^*(t) = x(t) - iy(t) \qquad (1.9)$$

بذلك ، فإن :

$$x(t) = \frac{1}{2}[z(t) + z^*(t)] \qquad (1.10)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}[z(t) - z^*(t)] \qquad (1.11)$$

نعود الى المعادلة (1.8).

وبقليل من التمحيص فيها، وبملاحظة أن وقوع العامل الاجرائي ($e^{T\frac{d}{dt}}$) على الدالة ($z(t)$) يعيد إنتاجها كما هي من دون تغيير، يتبين أن أبسط حل لهذه العلاقة يتمثل في المعادلة الآتية:

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \alpha z(t) \qquad (1.12)$$

حيث إن (α) ثابت وعدد مركب Complex Number بصورة عامة.

بذلك فإن:

$$\ddot{z}(t) = \frac{d^2}{dt^2} z(t) = \alpha^2 z(t) \qquad (1.13)$$

$$\dddot{z}(t) = \frac{d^3}{dt^3} z(t) = \alpha^3 z(t) \qquad (1.14)$$

وهلمّ جرّا.

فإذا عوّضنا عن ($z(t)$) ومشتقاتها الزمانية Time Derivatives في المعادلة (1.8)، حصلنا على:

$$[1 + \alpha + \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots] z(t) = z(t) \qquad (1.15)$$

وفي ضوء المعادلة (1.4)، فإن:

$$e^{T\alpha} z(t) = z(t) \qquad (1.16)$$

أي إن:

$$e^{T\alpha} = 1 \qquad (1.17)$$

ولكن، وبصورة عامة، فإن:

$$e^{2\pi ni} = 1 \qquad (1.18)$$

حيث(n)تساوي أي عدد صحيح Integer يقع بين ($-\infty$)،($+\infty$).

ذلك أن :

$$e^{2\pi ni} = cos\,(2\pi n) + i\,sin\,(2\pi n) \qquad (1.19)$$

$$cos(2\pi) = 1 \qquad (1.20)$$

$$sin(2\pi n) = 0 \qquad (1.21)$$

فإذا قارنا المعادلة (1.17) بالمعادلة (1.18)، تبين لدينا أن :

$$\alpha T = 2\pi ni \qquad (1.22)$$

أي إن :

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}\, ni \qquad (1.23)$$

وتسمى $\left(\frac{2\pi}{T}\right)$ في الأدبيات الفيزيائية التردد الزاوي Angular Frequency ويعبر عنها في العادة بالرمز (ω).

بذلك، فإن :

$$\alpha = n\omega i \qquad (1.24)$$

وتصبح المعادلة (1.12):

$$\dot{z}(t) = (n\omega i)\, z(t) \qquad (1.25)$$

كذلك، فإن المعادلة (1.13) تصبح :

$$\ddot{z}(t) = -\, n^2\omega^2 z(t) \qquad (1.26)$$

وفي ضوء المعادلة (1.6)، فإن :

$$[\ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t)] = -\, n^2\omega^2 x(t) - in^2\omega^2 y(t) \qquad (1.27)$$

فإذا جمعنا الحدين الحقيقيين معا، حصلنا على :

$$\ddot{x}(t) = -\, n^2\omega^2 x(t) \qquad (1.28)$$

وإذا جمعنا الحدين الخياليين Imaginary معاً، حصلنا على :

$$\ddot{y}(t) = -n^2\omega^2 y(t) \qquad (1.29)$$

وهي العلاقة ذاتها.

وهكذا، فإن أبسط حل للعلاقة (1.8)، ومن ثم للعلاقة (1.5)، هو الحل المتمثل في المعادلة (1.28)، والذي ينص على أن التسارع(($\ddot{x}(t)$))في البعد المتغير (($x(t)$)) يتناسب طرديا مع (($x(t)$))، وأن ثابت التناسب سالب بحيث إن الجسْم يتسارع دوماً نحو موضع الاتزان، أعني في الاتجاه المعاكس لاتجاه تنامي الانحراف عن موضع الاتزان. ويسمى هذا الضرب البسيط من الحركة الدورية الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion (S.H.M.).

ومن الواضح أن حلول المعادلة (1.28) تطيع العلاقة (1.5) لأي (n)، سالبة كانت أو موجبة. وعليه، فإذا كانت:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -(\omega)^2 x_1(t) \\ \ddot{x}_2 &= -(2\omega)^2\, x_2(t) \\ &\vdots \\ \ddot{x}_n &= -(n\omega)^2\, x_n(t) \\ &\vdots \end{aligned}\right] \qquad (1.30)$$

فإن كلاً من (x_1) ، (x_2) ، ..... (x_n)، ..... تشكل حلاً للعلاقة (1.5)؛ بمعنى أن:

$$x_n(t + T) = x_n(t) \qquad (1.31)$$

لأي (n).

والآن فلنتدبر المجموع الآتي:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x_n(t) \qquad (1.32)$$

حيث (a_n) مجموعة لانهائية من الثوابت.

(لا حاجة لتدبر مجموع كامل من مثل $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x_n$ ، حيث إنه، في ضوء المعادلة (1.28)، $x_{-n}(t)$ تساوي $x_n(t)$).

فإذا أثرنا على المعادلة (1.3) بعامل الإجراء $(e^{T\frac{d}{dt}})$ ، حصلنا على :

$$x(t+T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n(t+T) \qquad (1.33)$$

وبالنظر الى المعادلة (1.31)، فإن :

$$x(t+T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n(t+T)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n(t) = x(t) \qquad (1.34)$$

وعليه، فإن المجموع الممثل بالعلاقة (1.3) يشكل حلاً عاماً للعلاقة (1.5). ومعنى ذلك أن أي حركة دورية من الضرب الذي يطيع العلاقة (1.5) يمكن التعبير عنها بدلالة مجموع لانهائي من الحركات التوافقية البسيطة.

ويمكن إجراء المزيد من التحديد للمجموع (1.32) على النحو الآتي.

فلنعد إلى المعادلة (1.25).

من الواضح أن حل هذه المعادلة هو :

$$z_n(t) = C_n e^{in\omega t} \qquad (1.35)$$

حيث (C_n) تمثل ثابتاً مركباً.

$$z^*_n(t) = C^*_n e^{-in\omega t} \qquad (1.36)$$

وبالنظر إلى المعادلة (1.10)، فإن :

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[C_n e^{in\omega t} + C^*_n e^{-in\omega t}\right] \qquad (1.37)$$

بذلك، فإن المعادلة (1.32) تأخذ الشكل الآتي :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n C_n}{2} e^{in\omega t} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n C^*_n}{2} e^{-in\omega t} \qquad (1.38)$$

فإذا استبدلنا الثوابت (b_n) ، (b_{-n}) ، (b_0) بالثوابت $(a_n), (C_n), (C_n^*)$ بحيث كان :

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n C_n}{2} && (n \neq 0) \\ b_{-n} &= b_n^* = \frac{a_n C_n^*}{2} && (n \neq 0) \\ b_0 &= \frac{a_0}{2}\,[C_0 + C_0^*] && \end{aligned}\right] \qquad (1.39)$$

أضحت المعادلة (1.38) كالآتي :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{in\omega t} + \sum_{m=1}^{+\infty} b_{-m}\, e^{-im\omega t} \qquad (1.40)$$

ولنتدبر المجموع الثاني في الحد الأيمن. فإذا وضعنا (n) بدلا من $(-m)$ فيه، أضحى :

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n e^{in\omega t}$$

بذلك، تصبح المعادلة (1.40) كالآتي :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{in\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n e^{in\omega t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\omega t} \qquad (1.41)$$

وهكذا، فإذا كانت دالةٌ (أو حركة) دوريةً في الزمان، بحيث كانت تطيع العلاقة (1.1)، كان بالإمكان التعبير عنها بدلالة مجموع لامتناهٍ من الدوال (الحركات) الجيبية

Sinusoidal البسيطة ($e^{in\omega t}$) والتي تشكل تردداتها مضاعفات Multiples لتردد معين ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) يتحدد كلياً بفترة الحركة الدورية المعنية. ويسمى المجموع المبين في العلاقة (1.41) متسلسلة فورييه Fourier Series. وهي من أهم ما يترتب على سمة الدورية Periodicity الممثلة بالمعادلة (1.1). أما الترددات الأخرى ($\pm 2\omega, \pm 3\omega, \ldots$) فتسمى متوافقات ($\omega$) Harmonics (Overtones).

ويمكن التعبير عن المعادلة (1.41) بدلالات وطرق أخرى. وعلى سبيل المثال، فإنه يمكن التعبير عن المعادلة (1.37) على النحو الآتي:

$$x_n(t) = Re\,[C_n e^{in\omega t}] \tag{1.42}$$

فإذا كانت:

$$C_n = d_n + ig_n \tag{1.43}$$

أضحت المعادلة (1.42):

$$x_n(t) = Re\,[(d_n + ig_n)(cos\, n\omega t + isin\, n\omega t)$$

$$= d_n\, cosn\omega t - g_n sinn\omega t \tag{1.44}$$

بذلك، تغدو المعادلة (1.32) كالآتي:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [h_n\, cosn\omega t + h'_n\, sin\, n\omega t] \tag{1.45}$$

حيث (h_n)، (h'_n) ثابتان حقيقيان.

وتمثل (1.45) شكلاً آخر شائعاً لمتسلسلة فورييه.

وهناك شكل ثالث شائع يتمثل في الآتي.

فلنتدبر المعادلة (1.37) مرة أخرى.

ولنعبر عن (C_n) كالآتي:

$$C_n = A_n e^{i\phi_n} \tag{1.46}$$

حيث $(\phi_n), (A_n)$ ثابتان حقيقيان .

بذلك تصبح المعادلة (1.42):

$$x_n(t) = Re[A_n e^{i(n\omega t + \phi_n)}] = A_n cos(n\omega t + \phi_n) \quad (1.47)$$

وعليه، تكون المعادلة (1.32):

$$x_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n cos(n\omega t + \phi_n) \quad (1.48)$$

حيث (B_n) ثابت حقيقي .

ويمكن إيجاد معاملات المتسلسلة على النحو الآتي .

تدبر المعادلة (1.41). واضرب كلاً من حديها بالدالة $(\frac{1}{T} e^{-im\omega t})$ ، حيث (m) عدد صحيح . ثم كامل الحدين بين $t = T$ ، $t = 0$.

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, e^{-im\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega(n-m)t} dt \right) \quad (1.49)$$

والآن، تدبر التكامل في الحد الأيمن للمعادلة (1.49).

ولنبدأ بالحالة :

$$n - m \neq 0 \quad (1.50)$$

عند ذاك :

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega(n-m)t} dt = \frac{1}{iT\omega(n-m)} \left[e^{i\omega(n-m)t} \right]_0^T$$

$$= \frac{1}{iT\omega(n-m)} \left[e^{i\omega(n-m)T} - 1 \right] \quad (1.51)$$

بيد أن :

$$\omega T = 2\pi \tag{1.52}$$

وذلك بالتعريف .

بذلك ، ولما كان $(n - m)$ عدداً صحيحاً ، فإن :

$$\begin{aligned} e^{i\omega(n-m)T} &= e^{i2\pi(n-m)} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.53}$$

وهكذا ، فإن :

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega(n-m)t}\, dt = 0 \qquad (n - m \neq 0) \tag{1.54}$$

أما في حالة :

$$n - m = 0 \tag{1.55}$$

فإن التكامل يغدو :

$$\frac{1}{T} \int_0^T 1\, dt = \frac{1}{T} \left[t \right]_0^T = 1 \tag{1.56}$$

فإذا عرفنا :

$$\left.\begin{aligned} \delta_{nm} &= 1 \quad (n = m) \\ &= 0 \quad (n \neq m) \end{aligned}\right] \tag{1.57}$$

وهي ما يعرف بدلتا كرونكر Kronecker Delta ، أضحى التكامل :

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega(n-m)t}\, dt = \delta_{nm} \tag{1.58}$$

بذلك ، فإن الحد الايمن من المعادلة (1.49) يغدو :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\, \delta_{mn} = b_m \tag{1.59}$$

وذلك بالنظر إلى العلاقة (1.57).

بذلك تغدو العلاقة (1.49) كالآتي :

$$b_m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-im\omega t}\, dt \qquad (1.60)$$

فإذا كانت $(x(t))$ معروفة، فإنه يمكن، باستخدام العلاقة (1.60)، إيجاد (b_m) لجميع (m) .

ويمكن إيجاد معاملات المتسلسلة المبينة في المعادلة (1.45) بكيفية مشابهة. فإذا علمنا أن :

$$\frac{2}{T} \int_0^T cos\, m\omega t\, cos\, n\omega t\, dt = \delta_{nm} \qquad (1.61)$$

$$\int_0^T cos\, m\omega t\, sin\, n\omega t\, dt = 0 \qquad (1.62)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T sin\, m\omega t\, sin\, n\omega t\, dt = \delta_{mn} \qquad (1.63)$$

تبين لدينا أن :

$$h_m = \frac{2}{T} \int_0^T x(t)\, cos\, m\omega t \qquad (1.64)$$

$$h'_m = \frac{2}{T} \int_0^T x(t)\, sin\, m\omega t \qquad (1.65)$$

وتلخيصاً لما سبق، نقول : إذا كانت الحركة الممثلة بالدالة $(x(t))$ دورية بمعنى :

$$x(t + T) = x(t)$$

أمكن التعبير عن $(x(t))$ كالآتي :

إما :

$$
\left.\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\omega t} \\
b_m &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, e^{-im\omega t}
\end{aligned}\right] \qquad (1.66)
$$

أو :

$$
\left.\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} [h_n \cos n\omega t + h_n' \sin n\omega t] \\
h_m &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos m\omega t\, dt \\
h_m' &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin m\omega t\, dt
\end{aligned}\right] \qquad (1.67)
$$

أو :

$$
\left.\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \cos(n\omega t + \phi_n) \\
B_m &= \sqrt{h_m^2 + h_m'^2} \\
\phi_m &= \tan^{-1} \frac{h_m'}{h_m}
\end{aligned}\right] \qquad (1.68)
$$

ولمتسلسلة فورييه العديد من التطبيقات المهمة في الفيزياء. وهي تعد أداة لا غنى عنها في التحليل والبحث عن الحلول.

(٣ , ١) الحركة التوافقية البسيطة

في البند السابق بيّنا أن أبسط حركة دورية هي الحركة التوافقية البسيطة الممثلة في المعادلتين (1.28)، (1.27)، وأن أي حركة دورية تطيع المعادلة (1.1) يمكن التعبير عنها بدلالة مجموع لامتناهٍ من الحركات التوافقية البسيطة. لكن بياننا ذلك تم على أسس

رياضية. فهل إن الحركة التوافقية البسيطة هي حقا (فيزيائيا) أبسط حركة دورية؟ وبأي معنى تعدّ كذلك؟ ما المغزى والأساس الفيزيائيان لهذه الحركة؟

لنتدبر حركة جسيْم في بعد واحد في جيرة موضع اتزان معين. ولنقس إزاحة الجسيْم ($x(t)$)، من موضع الاتزان نفسه، بحيث إن ($x(t)$) تساوي صفراً عند موضع الاتزان. ولنرمز إلى طاقة وضع الجسيْم عند الموضع (x) بالرمز ($U(x)$)، ولنعتبر $U(0)$، أي قيمة طاقة الوضع عند موضع الاتزان، صفراً.

إذا كانت ($U(x)$) دالة متصلة وذات قدر معقول من الملوسة، فإنه يمكننا أن نعبّر عنها بدلالة مجموع لانهائي من الحدود وفق متسلسلة مكلورين Maclaurin Series كالآتي:

$$U(x) = U(0) + \left.\frac{d\,U(x)}{dx}\right|_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\left.\frac{d^2\,U(x)}{dx^2}\right|_{x=0}$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\left.\frac{d^3\,U(x)}{dx^3}\right|_{x=0} + \cdots \tag{1.69}$$

ولكن، حيث إننا اخترنا موضع الاتزان ليكون موضع الصفر، فإن:

$$U(0) = 0 \tag{1.70}$$

كذلك، وبالنظر إلى ما قلناه في البند الأول من أن موضع الاتزان يتميز بأنه الموضع الذي تكون فيه طاقة الوضع عند حدّها الأدنى، فإن:

$$\left.\frac{d\,U(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0 \tag{1.71}$$

$$\left.\frac{d^2\,U(x)}{dx^2}\right|_{x=0} > 0 \tag{1.72}$$

وبالنظر إلى المعادلة (1.72)، فإنه يمكن التعبير عن $\left[\frac{d^2 U}{dx^2}\Big|_{x=0}\right]$ بدلالة حاصل ضرب كتلة الجسيْم، وهي كمية موجبة في جميع الحالات، في مربع كمية حقيقية، أي:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2}\Big|_{x=0} = m\omega^2 \qquad (1.73)$$

حيث (ω) كمية حقيقية، (m) كتلة الجسيم.

بذلك، تغدو المعادلة (1.69) كالآتي:

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + 0\,(x^3) \qquad (1.74)$$

حيث $(0(x^3))$ تشير إلى مجموع الحدود الذي يبدأ بالقوة الثالثة للكمية (x)، أي بالكمية (x^3).

والآن، إذا كانت الإزاحة (x) صغيرة، كان الحد في (x^3) أصغر بكثير من الحد في (x^2)، ومن ثم كانت $(0(x^3))$ مهملة بالنسبة إلى الحد في (x^2).

وعليه، تكون $(U(x))$ كالآتي:

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad (1.75)$$

إذاً، فإن القوة المؤثرة على الجسيْم هي:

$$F(x) = -\frac{d\,U(x)}{dx} = -m\omega^2 x \qquad (1.76)$$

وبالنظر إلى قانون نيوتن الثاني في الحركة، فإن:

$$F(x) = m\,\ddot{x}(t) \qquad (1.77)$$

حيث $(\ddot{x}(t))$ هي تسارع الجسيْم.

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \qquad (1.78)$$

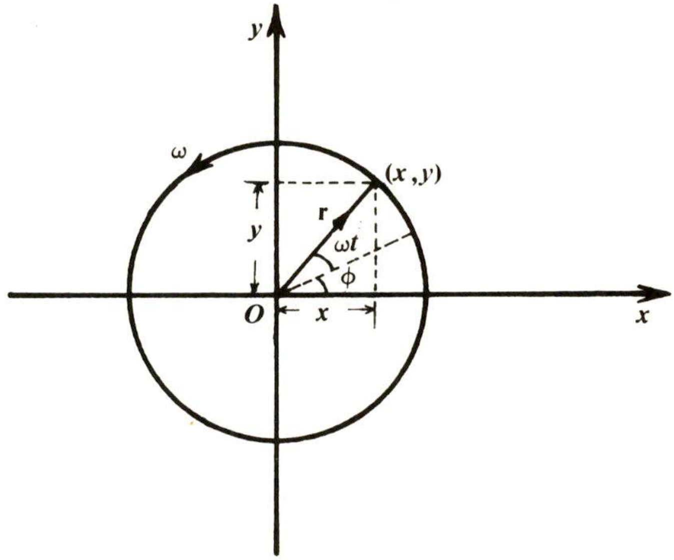
وهي مماثلة للمعادلة (1.28) والتي تصف أبسط حركة دورية من المنظور الرياضي، أي الحركة التوافقية البسيطة.

بذلك، فإن الحركة التوافقية البسيطة تتميز في أنها الحركة الناتجة عن التقريب الأول في طاقة الوضع بدلالة الإزاحة من موضع الاتزان، وهو التقريب الذي ينطبق في حال كون الإزاحة صغيرة. أما القوة المؤثرة في هذه الحال، والتي تناظر هذا التقريب، فتكون قوة مرجِعة Restoring Force، حيث إنها تسعى باستمرار إلى إرجاع الجسيْم إلى موضع الاتزان، معارضة بذلك فعل القصور الذاتي للجسيْم. فعلامة الناقص في المعادلة (1.76) تضمن أن تتنامى القوة المرجعة في اتجاه معاكس لتنامي (x) . فينشأ تعارض جدلي بين هذه القوة وبين القصور الذاتي للجسيْم تكون نتيجتها الحركة التوافقية البسيطة. فعند موضع الاتزان تكون القوة صفراً، لكن السرعة تكون عند حدها الأعلى. لذا، وبفعل القصور الذاتي للجسيْم، يتحرك الجسيْم بعيداً عن موضع الاتزان، فتنشأ القوة المرجعة وتتنامى مع تنامي الإزاحة في اتجاه معاكس، محاولة إرجاع الجسيْم إلى موضع الاتزان. فتتنامى السرعة حتى تصل الصفر عند الحد الأقصى للإزاحة، ثم تبدأ تعود القهقرى إلى موضع الاتزان بتأثير القوة المرجعة، فتعود السرعة إلى التنامي، ولكن في الاتجاه المعاكس، حتى تصل إلى حدها الأقصى عند موضع الاتزان، فتستمر الحركة في الاتجاه المعاكس على المنوال ذاته.

أما الحل العام للمعادلة (1.78)، فقد وجدناه بطرق رياضية بحتة في البند السابق، وعبّرنا عنه في العلاقة (1.37). لكننا سنلجأ هنا إلى طرق أخرى فيزيائية وديناميةلإيجاده. ونبدأ سعينا هذا بتدبّر الحركة الدائرية.

تدبر الشكل (٤ , ١). إنه يبين حركة جسيْم في دائرة نصف قطرها (r) في اتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة وبسرعة زاويّة Angular Speed ثابتة (ω). ولنفترض أن الجسيْم يكون في النقطة (x, y) على الدائرة عند اللحظة (t). ومن المعروف أن القوة الجاذبة المركزية Centripetal Force المنتجة للحركة الدائرية والمؤثرة على الجسيْم في أي

نقطة على الدائرة في اتجاه المركز تساوي :



الشكل (٤ , ١) - جسيْم يتحرك حركة دائرية

$$\mathbf{F} = -\frac{mv^2}{r^2}\,\mathbf{r} \tag{1.79}$$

بيد أن :

$$v = \omega r \tag{1.80}$$

وعليه، فإن :

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r} \tag{1.81}$$

أي :

$$F_x = -m\omega^2 x \tag{1.82}$$

$$F_y = -m\omega^2 y \tag{1.83}$$

حيث (F_x) ، (F_y) مركبتا القوة $(\mathbf{F})$ في اتجاه الاحداثيين (x) ، (y) على الترتيب .

لكن كلاً من المعادلتين (1.82)، (1.83) تعبر عن حركة توافقية بسيطة . بذلك يمكن القول أن الحركة الدائرية تنتج عن اجتماع حركتين توافقيتين بسيطتين ذاتَيْ تردد واحد وفي اتجاهين متعامدين معاً . ومن زاوية أخرى، فإنه يمكن التوصل إلى خصائص الحركة التوافقية البسيطة وشكلها العام عن طريق تحليل الحركة الدائرية . ولنرَ كيف يتم ذلك.

لنفترض أننا ابتدأنا القياس $(t=0)$ عندما كان الجسيْم المتحرك في نقطة على الدائرة يشكل الخط الواصل بينها وبين نقطة الأصل (O) الزاوية (ϕ) مع الإحداثي الأفقي (x) . وبعد مضي الفترة (t) ، يكون الجسيْم قد تحرك زاوية مقدارها (ωt) ، حيث إن (ω) هي معدل تغير الزاوية مع الزمن [انظر الشكل (٤ , ١)] . وهكذا، فعند الزمن (t) ، تكون الزاوية الكلية بين الخط الذي يصل موضع الجسيْم مع نقطة الأصل وبين الاتجاه الأفقي هي $(\omega t + \phi)$. وعليه، فإن المركبة الأفقية للمتجه $(\mathbf{r})$ ، وهو المتجه الذي يمثل موضع الجسيْم عند (t) بالنسبة إلى نقطة الأصل، هي :

$$x(t) = r \cos (\omega t + \phi) \tag{1.84}$$

أما المركبة العمودية، فهي :

$$y(t) = r \sin (\omega t + \phi) \tag{1.85}$$

ويمثل كل من المعادلتين (1.84)، (1.85) حلاً عاماً للمعادلة (1.78). وهو الحل ذاته الذي توصلنا إليه بطرق رياضية بحتة في المعادلة (1.47).

وبطبيعة الحال، فإنه يمكن كتابة المعادلة (1.84) على غرار المعادلة (1.37):

$$x(t) = \frac{1}{2} [C e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}] \tag{1.86}$$

حيث :

$$C = re^{i\phi} \tag{1.87}$$

أو :

$$x(t) = Re [re^{i(\omega t + \phi)}] \tag{1.88}$$

أو :

$$x(t) = a_1 cos\omega t + a_2 sin\omega t \qquad (1.89)$$

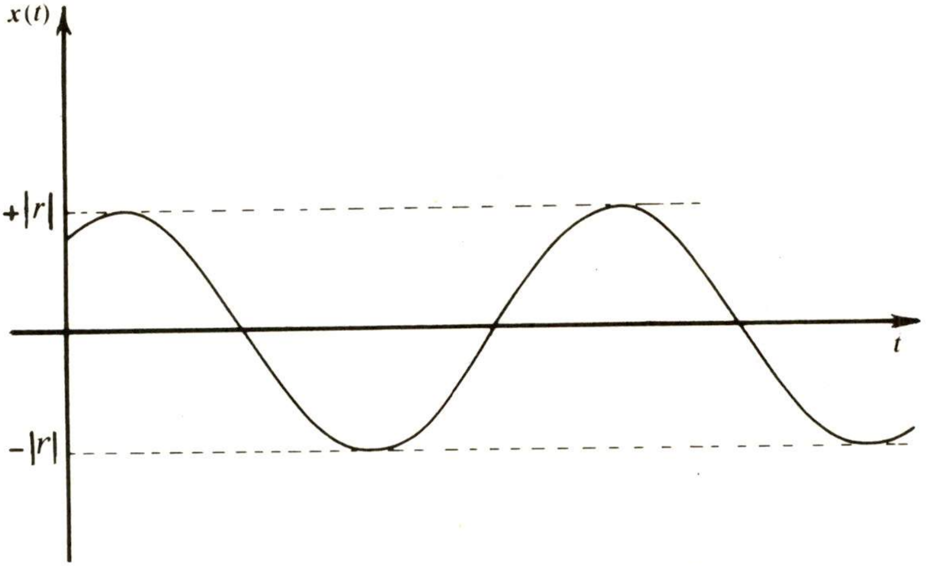
وكذا الحال مع المعادلة (1.85) بالطبع .

وكل هذه هي أشكال مختلفة للحل العام ذاته .

ونلاحظ الآتي بصدد الحل العام الممثل بالمعادلة (1.84).

١ - في حين أن (ω) ثابت دينامي غير اختياري تحدده طبيعة المجال المؤثر ويدخل في صميم معادلة الحركة التوافقية البسيطة، فإن الثابتين (r)،(ϕ) ثابتان اختياريان Arbitrary تحددهما الشروط الابتدائية ر حركة Initial Conditions . وتسمى (ω) التردد الزاوي . أما (ω) مقسومة على (2π) ، فتسمى التردد Frequency، ويرمز إليه في العادة بالرمز (ν).

٢ - لما كان الحد الأعلى للدالة $[cos(\omega t + \phi)]$ هو $(+1)$ وكان الحد الأدنى للدالة ذاتها (1-)، فإن $(+|r|)$ تمثل الحد الأعلى للإزاحة (x) ، فيما تمثل $(-|r|)$ حدها الأدنى . ويتضح ذلك بجلاء في الشكل (١ , ٥) الذي يبين المنحنى الذي يمثل العلاقة (1.84).



الشكل (١ , ٥) - منحنى الحركة التوافقية البسيطة

وتسمى (r) اتساع الاهتزاز Amplitude.

٣ - تسمى $(\omega t + \phi)$ زاوية الطور Phase Angle أو الطور Phase. أما (ϕ) فتسمى ثابت الطور Phase Constant. ولما كانت:

$$\cos (a + 2\pi) = \cos a \tag{1.90}$$

فإن الأطوار التي تختلف عن بعضها بالزاوية (2π) أو مضاعفاتها مكافئة لبعضها من حيث إنها جميعاً تنتج الإزاحة ذاتها. لذلك يمكن القول ان هذه الأطوار هي عملياً طور واحد. وليس ذلك سوى مظهر لكون الحركة التوافقية البسيطة حركة دورية تكرر ذاتها في دورات Cycles مماثلة لبعضها تماماً. فكل قيمة ممكنة للإزاحة تعود إلى الظهور وتكرر ذاتها في كل دورة جديدة. وبالتحديد، فإن كل قيمة للإزاحة تعود إلى الظهور بعد مضي فترة من الزمن تساوي $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$، حيث إن:

$$\omega t + \omega \left(\frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi = (\omega t + \phi) + 2\pi$$

وتسمى هذه الفترة الزمن الدوري Period للحركة المعنية. فإذا أشرنا إلى الزمن الدوري بالرمز (T)، كانت:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \tag{1.91}$$

وعليه، فإن التردد (ν) هو في الواقع عدد الدورات في وحدة زمن. أما التردد الزاوي (ω) فهو عدد الدورات في (2π) وحدة زمن.

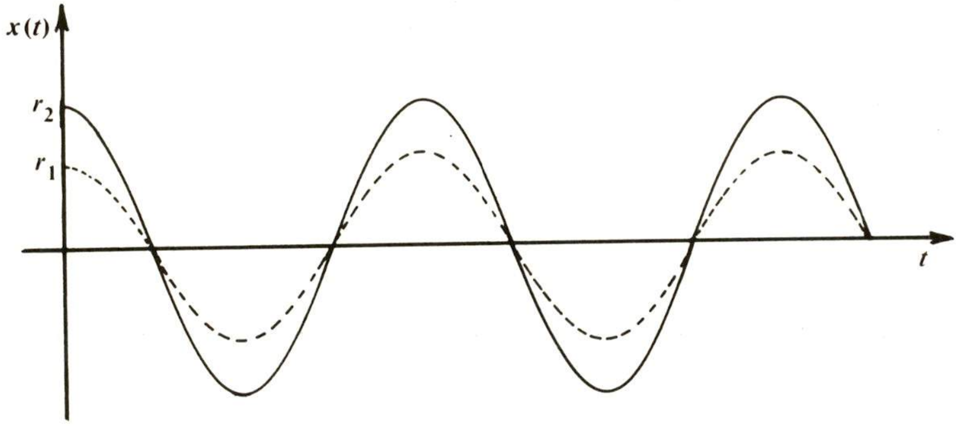
٤ - تظهر أهمية ثابت الطور عند تدبّر اجتماع حركتيْن توافقيتين بسيطتين أو أكثر. فالذي يقرر الفرق بين حركتين توافقيتين بسيطتين مماثلتين لبعضهما من حيث التردد والذي يقرر نتاج اجتماعهما معاً هو فرق الطور Phase Difference، أعني الفرق بين ثابتيْ طوريهما. ولبيان ذلك نتدبر الحركتين التوافقيتين البسيطتين الآتيتين:

$$x_1(t) = r_1 \cos \omega t \tag{1.92}$$

حيث (ϕ) تساوي صفراً في هذه الحال .

$$x_2(t) = r_2 \cos(\omega t + \phi_2) \qquad (1.93)$$

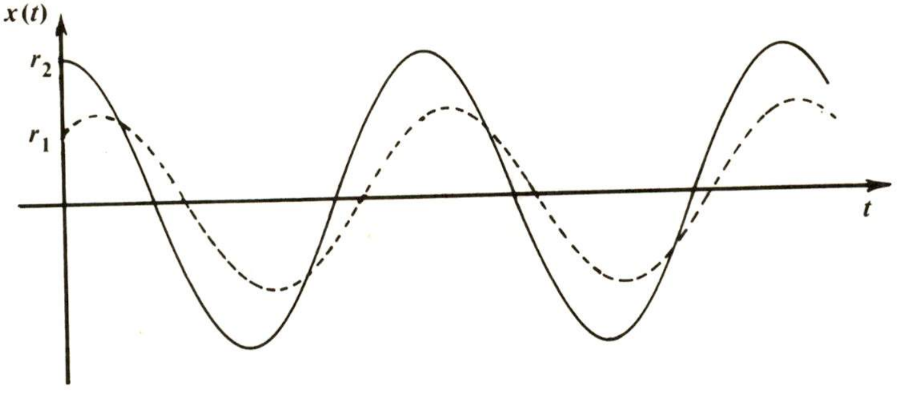
فإذا كانت (ϕ_2) تساوي صفراً ، كان طورا الحركتين متساويين (أي كان فرق الطور صفراً) ، ومن ثم تزامنت أحداث الحركة الأولى (مثل حدث المرور في موضع الاتزان أو حدث الوصول إلى الحد الأقصى) جميعاً مع أحداث الحركة الأخرى ، وكانت الإزاحتان بنسبة ($\frac{r_1}{r_2}$) في جميع الأوقات ، كما هو مبين في الشكل (٦ , ١) . وفي هذه الحال ، يقال إن الحركتين متواكبتان In Phase . وفيما عدا ذلك ، فإنه يقال إن الحركتين لامتواكبتان Out of Phase .



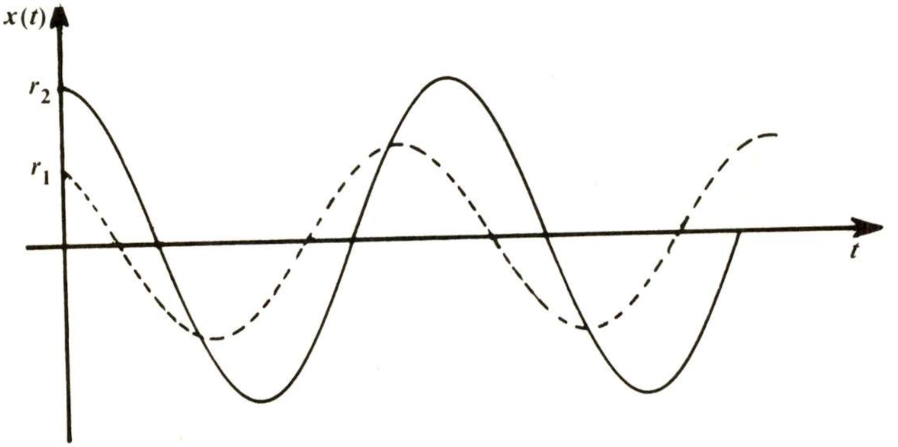
الشكل (٦ , ١) – فرق الطور يساوي صفراً

واذا كانت ($\phi_2 > 0$) ، وقعت أحداث الحركة الثانية قبل أحداث الحركة الأولى ، بمعنى أن الاهتزاز الثاني سبق الاهتزاز الأول في المرور بالوقائع الرئيسية التي تتميز بها الحركة التوافقية البسيطة . لذلك ، يقال في هذه الحال إن الاهتزاز الثاني يتقدم على الاهتزاز الأول بالثابت (ϕ_2) ، أو يقال إن الاهتزاز الثاني لديه تقدم في الطور مقداره (ϕ_2) بالنسبة إلى الاهتزاز الأول . أما إذا كانت ($\phi_2 < 0$) ، فيقال إن الاهتزاز الثاني يتأخر في الطور بالثابت ($|\phi_2|$) ، أو يقال إن الاهتزاز الثاني لديه تأخر في الطور مقداره ($|\phi_2|$) .

ويبين الشكل (٧ , ١) الحالة الأولى ، فيما يبين الشكل (٨ , ١) الحالة الثانية .



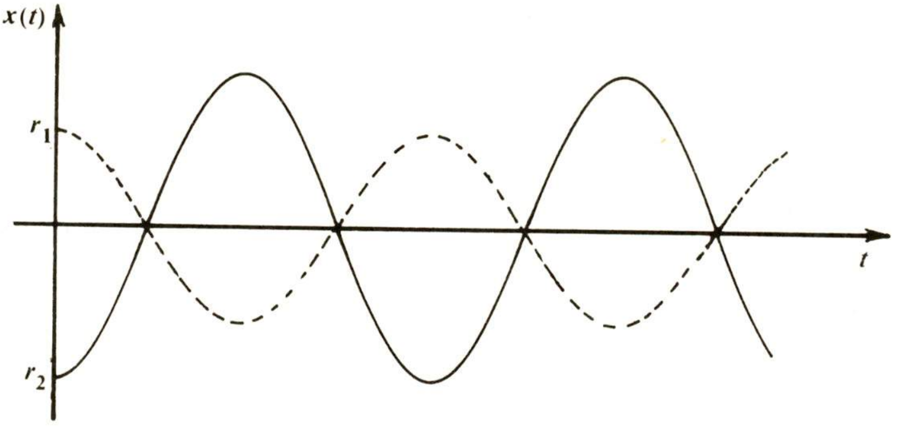
الشكل (١,٧) - الحركة الثانية تتقدم في الطور على الأولى



الشكل (١,٨) - الحركة الثانية تتأخر في الطور

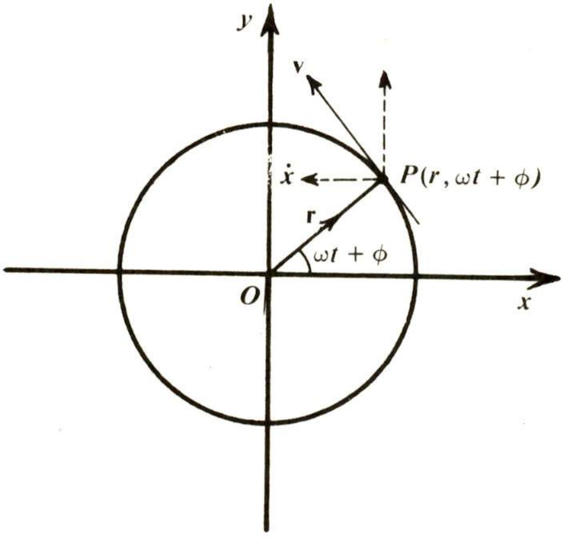
وتعد الحالتان ($\phi_2 = \pm \pi$) مكافئتين لبعضهما. ويقال في هاتين الحالتين إن الحركتين متضادتا الطور In Antiphase. ويبين الشكل (١ , ٩) هذا الوضع.

ويجدر الانتباه إلى أن تأخراً في الطور يزيد على (π) بقدر معين يكافىء تقدماً في الطور يقل عن (π) بالقدر ذاته.



الشكل (١ ، ٩) - الحركتان متضادتا الطور

٥ - فلنتدبر الحركة الدائرية مرة أخرى كما يبينها الشكل (١ , ١٠).



الشكل (١ , ١٠) - الحركة الدائرية

ولنتدبر متجه سرعة الجسيْم عند النقطة $P(r, \omega t + \phi)$ ، أي النقطة التي يشكل الخط الواصل بينها وبين نقطة الأصل(O) الزاوية $(\omega t + \phi)$ مع الإحداثي الأفقي (x). بالنظر إلى أن الحركة دائرية ، فإن متجِه السرعة يكون في اتجاه خط المماس للدائرة عند

النقطة المعنية (**v**). والذي يعنينا هنا هو المركبتان الافقية والعمودية لمتجه السرعة. ويتضح من الشكل (١٠ , ١) أن:

$$v_x = \dot{x} = -v \sin(\omega t + \phi) \qquad (1.94)$$

لكن:

$$v = \omega r \qquad (1.95)$$

إذاً:

$$\dot{x} = -\omega r \sin(\omega t + \phi) \qquad (1.96)$$

$$\dot{x} = +\omega r \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.97)$$

بذلك، فإن السرعة تتغير أيضاً بصورة توافقية بسيطة وبالتردد ذاته. لكن طورها يتقدم على طور الإزاحة بالثابت ($\frac{\pi}{2}$) . كما أن اتساعها Amplitude يساوي (ωr).

كذلك، إذا دمجنا المعادلتين (1.78)، (1.84)، تبين لدينا أن التسارع يساوي:

$$\ddot{x} = -\omega^2 r \cos(\omega t + \phi) \qquad (1.98)$$

$$\ddot{x} = \omega^2 r \cos(\omega t + \phi + \pi) \qquad (1.99)$$

من الواضح أن طور التسارع يتقدم على طور السرعة بالثابت ($\frac{\pi}{2}$)، وأن التسارع والإزاحة متضادا الطور In Antiphase. ويلاحظ أيضا أن كل تفاضل زمني يضيف ($\frac{\pi}{2}$) إلى الطور ويضرب الاتساع بالثابت (ω).

وتتضح الطبيعة التوافقية البسيطة لكلا السرعة والتسارع من التحليل الآتي: فلو أشرنا إلى السرعة بالرمز (u) والى التسارع بالرمز (a)، استطعنا أن نكتب المعادلة (1.78) بالصورتين الآتيتين:

$$\dot{u} = -\omega^2 x \qquad (1.100)$$

$$a = -\omega^2 x \qquad (1.101)$$

فإذا فاضلنا المعادلة الأولى مرة بالنسبة إلى الزمن، وفاضلنا الثانية مرتين، حصلنا على :

$$\ddot{u} = -\omega^2 u \qquad (1.102)$$

$$\ddot{a} = -\omega^2 a \qquad (1.103)$$

وهما من صنف المعادلة (1.78)، بمعنى أنهما تصفان حركة توافقية بسيطة في السرعة والتسارع على الترتيب.

ويمكن استعمال المعادلتين (1.84)، (1.96) للتعبير عن (r)، (ϕ) بدلالة الشروط الابتدائية على النحو الآتي :

فإذا كانت :

$$\left.\begin{array}{l} x = A \\ \dot{x} = v_0 \end{array}\right] \text{عند } t = 0 \qquad (1.104)$$

فإن :

$$\left.\begin{array}{l} A = r\cos\phi \\ v_0 = -\omega r \sin\phi \end{array}\right] \qquad (1.105)$$

بذلك، فإن :

$$\frac{A^2}{r^2} + \frac{v_0^2}{\omega^2 r^2} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \qquad (1.106)$$

أي :

$$r = \pm\sqrt{A^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad (1.107)$$

كذلك، فإذا قسمنا المعادلتين في (1.105) على بعضهما، تبين أن :

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega A} \qquad (1.108)$$

أي :

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega A}\right) \qquad (1.109)$$

بذلك نكون قد عبرنا عن (r) ، (ϕ) بدلالة (v_0) ، (A) ، (ω) .

إذا عدنا إلى المعادلتين (1.84)، (1.85)، لاحظنا أن :

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = cos^2(\omega t + \phi) + sin^2(\omega t + \phi) = 1 \qquad (1.110)$$

أي :

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1.111)$$

وهي المعادلة التي تصف الدائرة. وهذا يؤكد ما ذهبنا إليه من أن اجتماع حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين، متساويتي التردد لكن مختلفتين في الطور بالزاوية $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ، ينتج حركة دائرية تمثل مسارها المعادلة (1.111).

(٤ , ١) طاقة الحركة التوافقية البسيطة

اعتماداً على المعادلة (1.75)، فإن طاقة وضع الجسيْم المتحرك حركة توافقية بسيطة هي :

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad (1.112)$$

وبالنظر إلى المعادلة (1.84)، فإن :

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 cos^2(\omega t + \phi) \qquad (1.113)$$

بذلك، فإن طاقة الوضع تتغير مع الزمن بين الصفر وبين حدّ أقصى هو $\left(\frac{1}{2} m\omega^2 r^2\right)$.

وفي المقابل، فإن طاقة حركة الجسيْم تساوي :

$$E_K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad (1.114)$$

وبالنظر إلى المعادلة (1.96)، فإن :

$$E_K = \frac{1}{2}\, mr^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (1.115)$$

وفي هذه الحال أيضاً، نجد أن طاقة الحركة تتغير مع الزمن بين الصفر وبين حدّ أقصى هو ($\frac{1}{2}\, mr^2\omega^2$)، وهو مماثل تماماً للحد الأقصى لطاقة الوضع. لكن يلاحظ أيضا أن (U) تكون عند حدها الأقصى في اللحظة التي تكون فيها (E_K) عند حدها الأدنى، أي تكون صفراً، والعكس بالعكس. لماذا وكيف؟

فلنتدبر الطاقة الكلية، أعني مجموع طاقتي الوضع والحركة، (W).

$$W = E_K + U(x) \qquad (1.116)$$

$$W = \frac{1}{2}\, m\omega^2 r^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] \qquad (1.117)$$

$$W = \frac{1}{2}\, m\omega^2 r^2 \qquad (1.118)$$

ونلاحظ الآتي :

(١) إن الطاقة الكلية ثابتة في الزمان، أي إنها محفوظة Conserved. وهذا يعني أن طاقتي الوضع والحركة تتغيران في الزمان بصورة تضمن بقاء الطاقة الكلية ثابتة. فكل منهما يزداد ويكسب المزيد على حساب الآخر. فالقدر ذاته من الطاقة يتوزع بين طاقتي الوضع والحركة، والذي يتغير مع الزمن هو التوزيع، وليس مقدار الطاقة الموزع. فحركة الجسيْم ليست سوى مظهر لتغير هذا التوزيع في الزمان. فهناك تبادل للقدر ذاته من الطاقة بين الجسيْم وبين مجال القوة الذي يؤثر عليه.

(٢) إن مقدار الطاقة الكلية مساوٍ للحد الأقصى لكل من طاقتي الوضع والحركة. وهذا متوقع، حيث إنه لا يجوز بتاتاً لأي من الطاقتين أن تتجاوز الطاقة الكلية. كذلك، فلا بد للواحدة أن تكون صفراً حين تكون الثانية عند حدّها الأقصى بالنظر إلى العلاقة (1.118).

(٣) لما كانت :

$$cos^2 x = \frac{1}{2}\ [cos^2 x + 1] \tag{1.119}$$

فإن :

$$U(t) = \frac{1}{4}\ m\omega^2 r^2 [cos\, 2\,(\omega t + \phi) + 1] \tag{1.120}$$

كذلك، لما كانت :

$$sin^2 x = \frac{1}{2}\ [1 - cos\ 2\ x] \tag{1.121}$$

فإن :

$$E_K(t) = \frac{1}{4}\ m\omega^2 r^2 [1 - cos\, 2\,(\omega t + \phi)] \tag{1.122}$$

وبالنظر إلى المعادلة (1.118)، فإن :

$$U(t) = \frac{W}{2} + \frac{W}{2} cos\,(2\omega t + 2\phi) \tag{1.123}$$

$$E_K(t) = \frac{W}{2} - \frac{W}{2} cos\,(2\omega t + 2\phi) \tag{1.124}$$

$$E_K(t) = \frac{W}{2} + \frac{W}{2} cos\,(2\omega t + 2\phi + \pi) \tag{1.125}$$

أو :

$$U'(t) = U(t) - \frac{W}{2} = \frac{W}{2} cos\,(2\omega t + 2\phi) \tag{1.126}$$

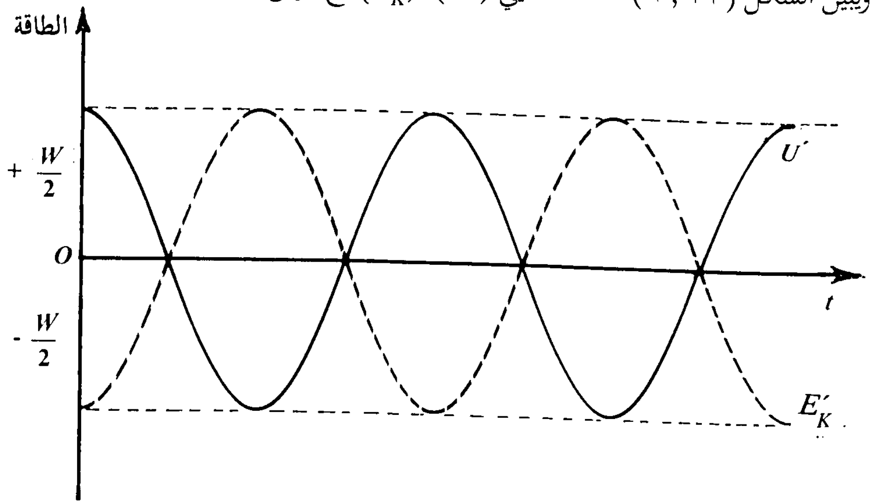
$$E'_K(t) = E_K(t) - \frac{W}{2} = \frac{W}{2} cos\,(2\omega t + 2\phi + \pi) \tag{1.127}$$

ويلاحظ أن (U') لا تختلف جوهريا عن (U)؛ وكذا الحال بالنسبة الى (E'_K) ، (E_K). فهو اختلاف سطحي يعبر عن اختلاف اختيار موضع الصفر لكل من الطاقتيْن.

ويتضح من المعادلتين (1.126)، (1.127) أن طاقتي الوضع والحركة، ممثلتين بـِ

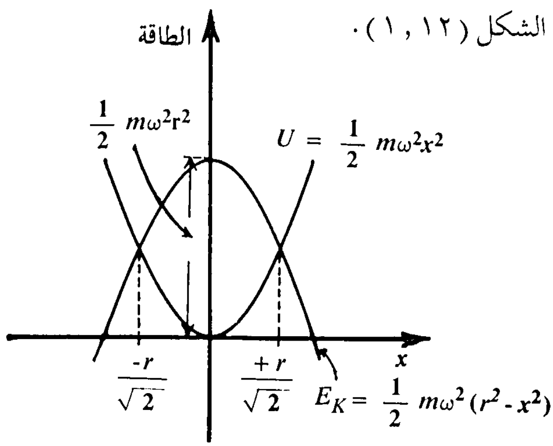
$(\acute{U})$، $(\acute{E_K})$، تتغيران مع الزمن بصورة توافقية بسيطة، بتردد يبلغ ضعف تردد الإزاحة والسرعة، أي بفترة دورية تبلغ نصف فترة الإزاحة والسرعة، وباتساع يبلغ $(\frac{W}{2})$، وبثابت طور يبلغ ضعف ثابت طور الإزاحة. أما طورا الطاقتين، فهما متضادان In Antiphase.

ويبين الشكل (١ ,١١) أدناه منحنيي $(\acute{U})$، $(\acute{E_K})$ مع الزمن.



الشكل (١ ,١١) - منحنيا طاقتي الوضع والحركة مع الزمن

ونجد نسقاً مشابهاً للنسق البادي في الشكل (١ ,١١)، إذا تدبّرنا المنحنيين اللذين يصفان تغير كل من (U)، (E_K) مع (x)، اعتماداً على المعادلات (1.75)، (1.116)، (1.118)، كما في الشكل (١ ,١٢).



الشكل (١ ,١٢) - تغير طاقتي الوضع والحركة مع الإزاحة

ونلاحظ أن منحنى طاقة الحركة في الشكل (١٢ , ١) هو معكوس (مقلوب) منحنى طاقة الوضع، تماما كما هو الحال في الشكل (١١ , ١). وهذا النسق في كلا الشكلين إنما يعكس حقيقة كون طوري الطاقتين متضاديْن.

(١ , ٥) اجتماع الحركات التوافقية البسيطة في بعد واحد

لنفترض أن جسيْماً تعرّض لحركتين توافقيتين بسيطتين متساويتي التردد، لكن مختلفتي الاتساع وثابت الطور، في آن واحد. في هذه الحال تكون الإزاحة الناتجة مساوية لمجموع الإزاحتين الناتجتيْن عن الحركتيْن. فإذا أشرنا إلى الازاحة النهائية بالرمز (x) ، وأشرنا إلى الإزاحة الناجمة عن الحركة الأولى بالرمز (x_1) ، وإلى الإزاحة الناجمة عن الحركة الثانية بالرمز (x_2) ، كانت :

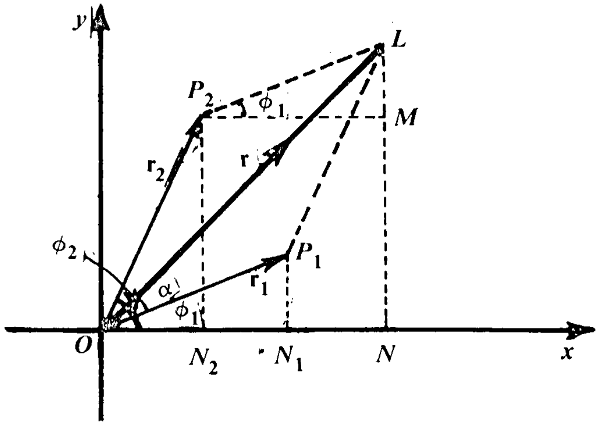
$$x_1 = r_1 cos(\omega t + \phi_1) \tag{1.128}$$

$$x_2 = r_2 cos(\omega t + \phi_2) \tag{1.129}$$

$$x = x_1 + x_2 \tag{1.130}$$

ولقد بينّا سابقاً أنه يمكن النظر إلى الحركة التوافقية البسيطة على أنها المركبة الأفقية (أو العمودية) لمتجه ثابت الطول يدور بسرعة زاوية ثابتة في اتجاه معاكس لاتجاه عقارب الساعة. بذلك. فإنه يمكن النظر الى (x) على أنها المركبة الأفقية لمحصلة جمع المتجهين الممثلين للحركتين التوافقيتين البسيطتين. ولنتدبر الشكل (١٣ , ١) أدناه.

نمثل الحركة الأولى بالمتجه $(\mathbf{r}_1)$ أو $(\overrightarrow{OP_1})$ ، والحركة الثانية بالمتجه $(\mathbf{r}_2)$ أو $(\overrightarrow{OP_2})$. ونتدبر الوضع عند $(t = 0)$.وبالنظر إلى ما قلناه أعلاه، فإن (OP_1) تساوي (r_1) ، (OP_2) تساوي (r_2) ، (ON_1) تساوي (x_1) ، (ON_2) تساوي (x_2) . كذلك، فإن الزاوية $(\angle P_1ON)$ تساوي (ϕ_1) .كما أن الزاوية $(\angle P_2ON)$ تساوي (ϕ_2). ولنرمز إلى الفرق في الطور، أعني $(\phi_2 - \phi_1)$ ، بالرمز (δ). ولنشر إلى الزاوية $(\angle LOP_1)$ بالرمز (α).



الشكل (١٣,١) – اجتماع حركتين توافقيتين بسيطتين

نبدأ بإيجاد محصلة ($\mathbf{r}_1$)، ($\mathbf{r}_2$) والممثلة بالمتجه ($\mathbf{r}$) أو ($\overrightarrow{OL}$)، وذلك بإكمال متوازي الأضلاع (OP_1LP_2). ومن الواضح أن (ON) تساوي (x) . ولما كان (P_1L) موازياً لـ(OP_2)، فإن (N_1N) يساوي (ON_2)، أي يساوي (x_2) . ولما كان (ON) يساوي (N_1N) مضافاً إلى (ON_1)، فإن (x) تساوي (x_1) مضافة إلى (x_2)، وهو ما تنصّ عليه المعادلة (1.130).

ويتضح من الشكل (١٣,١) أن:

$$x = r\cos(\omega t + \phi_1 + \alpha) \qquad (1.131)$$

ما هي (r)، (α) بدلالة ثوابت الحركتين؟

لنتدبر المثلث (OP_1L). من المعلوم أن:

$$(OL)^2 = (OP_1)^2 + (P_1L)^2 - 2(OP_1)(P_1L)\cos\angle OP_1L \qquad (1.132)$$

لكن:

$$\angle OP_1L = \pi - \delta \qquad (1.133)$$

إذاً :

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \delta \qquad (1.134)$$

كذلك ، ومن المثلث ذاته ، فإن :

$$\frac{\sin \alpha}{r_2} = \frac{\sin(\pi - \delta)}{r} \qquad (1.135)$$

أي :

$$\sin \alpha = \frac{r_2}{r} \sin \delta \qquad (1.136)$$

بهذه الطريقة يمكن حساب (r) ، (α) بدلالة (r_1) ، (r_2) ، (ϕ_1) ، (ϕ_2).

ويمكن التعبير عن المعادلة (1.131) كالآتي :

$$x = r \cos(\omega t + \theta) \qquad (1.137)$$

حيث (θ) هي مقدار الزاوية $\angle LON$.

ويمكن التعبير عن (θ) بدلالة ثوابت الحركتين على النحو الآتي .

نمدّ خطاً مستقيماً أفقيا من النقطة (P_2) يقطع (LN) في النقطة (M).

ويتضح من الشكل (١٣ ، ١) أن الزاوية $\angle LP_2M$ تساوي (ϕ_1) . بذلك ، فإن (LM) تساوي $(r_1 \sin\phi_1)$. كذلك ، فإن (MN) يساوي (P_2N_2) ، أي إنه يساوي $(r_2 \sin \phi_2)$. بذلك ، فإن (LN) يساوي $(r_1 \sin \phi_1 + r_2 \sin \phi_2)$. ومن جهة أخرى ، وكما أسلفنا ، فإن (ON) يساوي $[x_1(0) + x_2(0)]$ ، أي $(r_1 \cos \phi_1 + r_2 \cos \phi_2)$.

بذلك ، فإن :

$$\tan \theta = \frac{r_1 \sin \phi_1 + r_2 \sin \phi_2}{r_1 \cos \phi_1 + r_2 \cos \phi_2} \qquad (1.138)$$

(٦ ، ١) التداخـــل

يمكن اعتماد المعادلة (1.134) أساساً أو مدخلاً لموضوع التداخل ، وهو أحد أهم

الموضوعات في فيزياء الأمواج. فلو ضربنا جانبي المعادلة (1.134) بالثابت $(\frac{1}{2} m\omega^2)$، لحصلنا على:

$$W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2}\ \cos\delta \qquad (1.139)$$

حيث (W) تشير إلى الطاقة الميكانيكية الكلية، أي:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \\ W_1 &= \frac{1}{2} m\omega^2 r_1^2 \\ W_2 &= \frac{1}{2} m\omega^2 r_2^2 \end{aligned}\right] \qquad (1.140)$$

وذلك حسبما جاء في المعادلة (1.118).

وتشير المعادلة (1.139) بجلاء إلى أن الطاقة الكلية الناتجة عن اجتماع حركتين توافقيتين بسيطتين لا تساوي مجموع طاقتي الحركتين، بل تساوي بصورة عامة كمية تقع بين حدين وتعتمد على فرق الطور بين الحركتين. أما الحد الأقصى، فهو يناظر الطور الذي تكون عنده $(\cos\delta)$ مساوية لـِ (+ ١). عند ذاك:

$$W_{max} = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1\ W_2} \qquad (1.141)$$

$$W_{max} = (\sqrt{W_1} + \sqrt{W_2})^2 \qquad (1.142)$$

وأما الحدّ الأدنى، فيقع عند $(\cos\delta = -1)$، أي:

$$W_{min} = W_1 + W_2 - 2\sqrt{W_1\ W_2} \qquad (1.143)$$

$$W_{min} = (\sqrt{W_1} - \sqrt{W_2})^2 \qquad (1.144)$$

وإذا كانت الحركتان الأصليتان متساويتي الاتساع، كانت (W_1) مساوية لـ (W_2)، ومن ثم كانت:

$$\left.\begin{aligned} W_{max} &= 4W_1 \\ W_{min} &= 0 \end{aligned}\right] \qquad (1.145)$$

وتظهر هذه الحالة بجلاء الأهمية القصوى لفرق الطور في اجتماع الاهتزازات. فهو الذي يقرر ما إذا كانت الاهتزازات يلغي بعضها بعضاً أو يدعم بعضها بعضاً، أي كيفية تداخل الاهتزازات معاً. فهي تتداخل معاً إما سلباً وإما ايجاباً، إما تدميرياً Dectructively وإما بصورة بناءة Constructively.

ولبيان مغزى التداخل طاقياً، فلنتدبر الوضع الآتي.

فلنفترض أن هناك حركة توافقية بسيطة في كل نقطة في المكان، وأن التردد هو ذاته لجميع النقط المكانية، ولنفترض أن ثابت الطور يختلف من نقطة إلى أخرى بصورة متصلة ودورية، بمعنى أنه دالة متصلة ودورية للأبعاد المكانية. ولنفترض أن طائفة مشابهة من الحركات التوافقية البسيطة في البعد ذاته قد ركب على الطائفة الأولى. في هذه الحال، فإن المعادلة (1.134) تنطبق في كل نقطة مكانية، وتكون (r) ، (r_1) ، (r_2) ، (δ)، جميعاً دوالاً مكانية.

ولنتدبر عنصراً حجمياً Volume Element صغيراً حول نقطة اختيارية مقداره (δV)، ولنرمز إلى الكتلة المهتزة فيه بالرمز (δm)، بحيث إن:

$$\delta m = \varrho \delta V \qquad (1.146)$$

حيث (ϱ) هي الكثافة الكتلية، والتي تتغير من نقطة إلى أخرى في هذه الحال.

فإذا عبرنا عن الطاقة الاهتزازية الكلية للعنصر الحجمي بالرمز (δW) بحيث إن:

$$\delta W = u\delta V \qquad (1.147)$$

حيث (u) هي كثافة الطاقة،

فإن:

$$u = u_1 + u_2 + 2\sqrt{u_1 u_2}\ cos\,\delta \qquad (1.148)$$

ولنتدبر الحالات المترتبة على المعادلة (1.148).

١ - **إذا اجتمعت الطائفتان معاً بحيث كان فرق الطور (δ) متغيراً مع الزمن بصورة** عشوائية، كان المعدل الزمني Time Average لـ ($cos\,\delta$) صفراً في كل نقطة مكانية، ومن ثم كانت كثافة الطاقة في كل نقطة مساوية لمجموع كثافتي طاقتي الحركتين المجتمعتين. وفي هذه الحال يقال إن الحركتين لامتسقتان Incoherent. وإذا كانت الحركتان متساويتي الاتساع، كانت كثافة الطاقة في كل نقطة مساوية لـ ($2u_1$).

٢ - أما إذا كانت (δ) ثابتة في الزمان، كانت (δ) متغيرة من نقطة إلى أخرى في المكان وتراوحت بين الحدّ الأدنى ($cos\,\delta = -1$) وبين الحد الأقصى ($cos\,\delta = +1$)، أي تراوحت (u) بين ($u = (\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2})^2$) وبين ($u = (\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2})^2$). وإذا كانت الحركتان متساويتي الاتساع، كان الحد الأدنى صفراً، وكان الحد الأقصى مساوياً لـ ($4u_1$). وفي هذه الحال، يقال إن الحركتين متسقتان Coherent. ويطلق على عملية الاجتماع هذه التداخل Interference. بذلك، فإن كون الحركتين متسقتين هو شرط أساسي من شروط حدوث التداخل. ويلاحظ أن التداخل ليس سوى إعادة توزيع للطاقة بحيث إن الحركة تعزز في بعض النقط وتلغى في نقط أخرى. ففي حين أن الطاقة تكون موزعة بصورة متساوية في حال غياب التداخل (مثلا في حال اللااتساق Incoherence)، فإنها تتوزع بصورة غير متساوية بحيث تنتفي الحركة في نقط وتتعزز في نقط أخرى في حال التداخل. وهذا ما يحصل في حال الصوت والضوء مثلاً. فالصوت والضوء هما نوعان من الحركة الموجية، والتي وصفناها مبدئيا بدلالة طائفة لامتناهية من الحركات التوافقية البسيطة ممتدة في المكان.

(١,٧) الحيـود

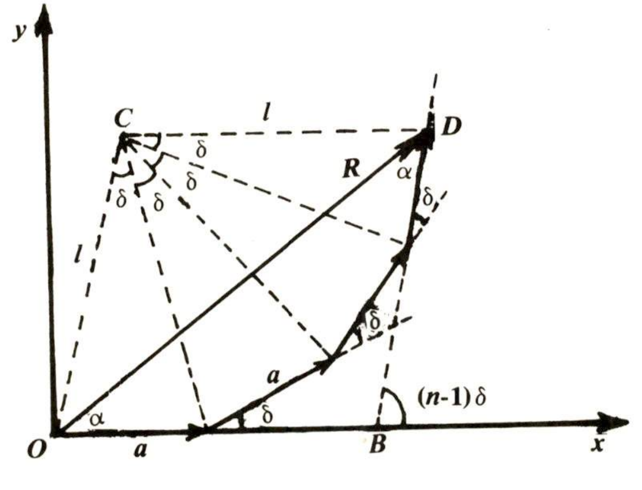
تبرز في البصريات Optics حالات تنطوي على اجتماع عدد لانهائي ومتصل Continuous من الحركات التوافقية البسيطة في النقطة المكانية الواحدة. ويسمى مثل هذه الحالات الحيود Diffraction. فالحيود هو تداخل عدد لانهائي ومتصل من الحركات الدورية. وهو يحدث في العادة عندما يمر الضوء مثلاً من خلال فتحة صغيرة أو شق ضيق. ففي هذه الحال، يتصرف الشق وكأنه سلسلة لانهائية ومتصلة من مصادر الحركات التوافقية البسيطة.

ولتحليل هذا الوضع، نتصور أننا بإزاء عدد محدود وغير متصل (n) من مصادر الحركات التوافقية البسيطـة، ونتصور أن فرق الطور بين الحركة والتي تليها هـو (δ). فإذا مثّلنا الحركـة الأولى بـِ $[a\cos(\omega t+\phi)]$ ، كانت الحركة الثانية هي $[a\cos(\omega t+\phi+\delta)]$ ، وكانت الثالثة هي $[a\cos(\omega t+\phi+2\delta)]$ وهلمّ جرّا حتى $[a\cos(\omega t+\phi+(n-1)\delta)]$. وبطبيعة الحال، فإن (ϕ)، (δ) تختلفان من نقطة إلى أخرى في المكان المتعرض للحركات المعنية. كذلك، فإننا نفترض أن هذه الحركات جميعاً متساوية الاتساع. وهو افتراض معقول إذا كانت النقطة المعنية بعيدة جدّاً عن مصدر هذه الحركات بالنسبة إلى طول هذا المصدر. فإذا أشرنا إلى محصلة هذه الطائفة من الحركات بالرمز (X)، كانت:

$$X(t)=a\cos(\omega t+\phi)+a\cos(\omega t+\phi+\delta)+a\cos(\omega t+\phi+2\delta)+\cdots\cdots+a\cos[\omega t+\phi+(n-1)\delta] \qquad (1.149)$$

كيف نمثل ذلك بدلالة المتجهات ؟

نتدبر الحركات المبينة في المعادلة (1.149) في اللحظة التي تكون عندها $(\omega t+\phi)$ صفراً، وذلك من أجل التبسيط. ونمثل كلاّ منها بمتجه على غرار ما فعلناه سابقا، ثم نجمع هذه المتجهات بالكيفية المعهودة لجمع المتجهات، فنحصل على الشكل (١,١٤).



الشكل (١,١٤) - اجتماع عدد من الحركات التوافقية البسيطة

تمثل المتجهات الصغيرة الحركات المراد جمعها، حيث إن مركباتها الأفقية هي (a)، $(a \cos \delta)$، $(a \cos 2\delta)$، ......، $[a \cos (n-1) \delta]$، على الترتيب، وابتداء من نقطة الأصل (O). ويمثل المتجه $(\overrightarrow{OD})$ محصلة هذه المتجهات. ولما كانت (R) هي طول هذا المتجه، فإن مركبته الأفقية (X) تساوي:

$$X = R \cos \alpha \qquad (1.150)$$

حيث (α) هي الزاوية $\angle DOB$.

ومعنى ذلك أن:

$$X = R \cos (\omega t + \phi + \alpha) \qquad (1.151)$$

وبصورة عامة، فإن (α) تعتمد على موضع التقاء هذه الحركات.

ولنرسم دائرة تمر في رؤوس المتجهات الممثلة للحركات، وتمثل (C) مركزها، فيما تمثل (l) نصف قطرها. ومن الواضح أن المثلثات، التي تشكل (C) رأسها وتشكل المتجهات الصغيرة قواعدها، هي مثلثات متساوية الضلعين، كما أنها مماثلة لبعضها. وبالنظر إلى ذلك، وإلى أن $COD \triangle$ مثلث متساوي الضلعين، فإن:

$$\angle ODB = \angle DOB = \alpha \qquad (1.152)$$

ولما كانت:

$$\angle DBx = \angle ODB + \angle DOB = 2\alpha \qquad (1.153)$$

فإن:

$$\alpha = (n - 1) \frac{\delta}{2} \qquad (1.154)$$

ومن الواضح أن زاوية الرأس لكل من المثلثات هي (δ). وعليه، فإن:

$$\angle OCD = n\delta \qquad (1.155)$$

فإذا تدبرنا $OCD\,\triangle$ ،تبين لدينا أن :

$$\frac{1}{2}\ R = l \sin n\frac{\delta}{2} \qquad (1.156)$$

$$\frac{1}{2}\ a = l \sin \frac{\delta}{2} \qquad (1.157)$$

أي إن :

$$R = a\ \frac{\sin n\ \delta/2}{\sin \delta/2} \qquad (1.158)$$

ويمكن اشتقاق المعادلتين (1.154)، (1.158) جبريا على النحو الآتي :

يمكن كتابة المعادلة (1.159) على النحو الآتي :

$$X = Re\,[\ a\, e^{i(\omega t + \phi)}\ (1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + \cdots + e^{i(n-1)\delta})\ ] \qquad (1.159)$$

حيث (Re) تعني « القيمة الحقيقية لما بين القوسين » .

أي :

$$X = Re\,[a\, S e^{i(\omega t + \phi)}] \qquad (1.160)$$

حيث :

$$S = 1 + e^{i\delta} + 2e^{i\delta} + \cdots + e^{i(n-1)\delta} \qquad (1.161)$$

ويمكن كتابة (S) على النحو الآتي :

$$aS = R e^{i\alpha} \qquad (1.162)$$

بحيث تأخذ المعادلة (1.160) شكل المعادلة (1.151).

وإذا ضربنا المعادلة (1.161) بـ $(e^{i\delta})$ ، حصلنا على :

$$Se^{i\delta} = e^{i\delta} + e^{2i\delta} + e^{3i\delta} + \cdots + e^{in\delta} \qquad (1.163)$$

بذلك ، فإن :

$$e^{i\delta}S - S = e^{in\delta} - 1 \qquad (1.164)$$

أو :

$$S = \frac{e^{in\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1} \qquad (1.165)$$

ويمكن التعبير عن (S) على النحو الآتي :

$$S = \left[\frac{e^{in\delta/2} - e^{-in\delta/2}}{e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}} \right] \cdot \frac{e^{in\delta/2}}{e^{i\delta/2}} \qquad (1.166)$$

أو :

$$S = \frac{sin\ n\delta/2}{sin\ \delta/2} \cdot e^{i(n-1)\delta/2} \qquad (1.167)$$

وبالنظر إلى المعادلة (1.162)، فإن :

$$\left. \begin{aligned} R &= a\ \frac{sin\ n\ \delta/2}{\sin\ \delta/2} \\ \alpha &= (n-1)\ \frac{\delta}{2} \end{aligned} \right] \qquad (1.168)$$

وهي النتيجة ذاتها التي سبق أن توصلنا إليها بالطرق الهندسية.

ولندرس هذه النتيجة في الحد الذي تقترب فيه (n) من اللانهاية وتقترب كل من (δ) ،(a) من الصفر في الآن ذاته :

$$\left. \begin{aligned} n &\longrightarrow +\infty \\ \delta &\longrightarrow 0 \\ a &\longrightarrow 0 \end{aligned} \right] \qquad (1.169)$$

وفي هذه الحال :

$$\left. \begin{aligned} \alpha = (n-1)\ \frac{\delta}{2} &\longrightarrow n\ \frac{\delta}{2} \\ sin\ \frac{\delta}{2} \longrightarrow \frac{\delta}{2} &= \frac{\alpha}{n} \end{aligned} \right] \qquad (1.170)$$

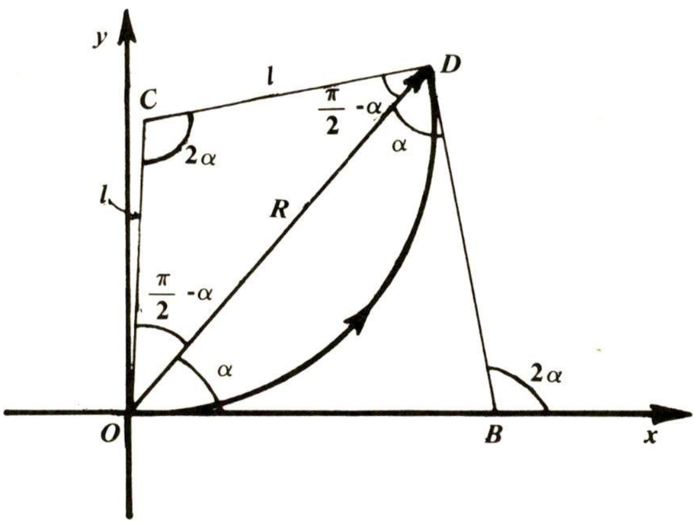
ومن ثم ، تغدو (R) عند هذا الحـد :

$$R = A \frac{\sin \alpha}{\alpha} \tag{1.171}$$

حيث :

$$A = \underset{\substack{n \to \infty \\ \alpha \to 0}}{\mathrm{Lm}} (na) \tag{1.172}$$

ويظهر مغزى المعادلتين (1.171)، (1.172)، إذا تدبرنا التمثيل الهندسي المبين في الشكل (١٥ , ١) .



الشكل (١٥ , ١) – جمع عدد لامتناهٍ ومتصل من الحركات

ويتضح من الشكل (١٥ , ١) أن طائفة المتجهات الممثلة للحركات تتحول إلى وتر دائرة مركزها (C) ونصف قطرها (l) عند الحد الممثل بالعلاقات (1.169). ويتضح منه أيضا أن :

$$\angle OCD = 2\alpha \tag{1.173}$$

فإذا كان طول الوتر (OD) هو (A)، فإن :

$$\frac{A}{l} = 2\alpha \tag{1.174}$$

كذلك :

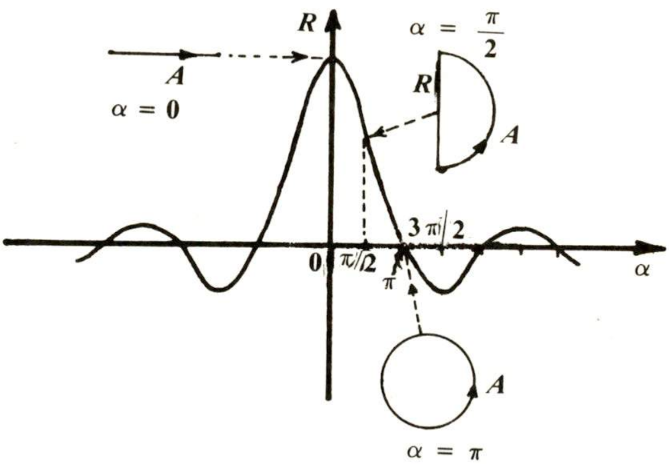
$$\frac{1}{2} R = l \sin \alpha \qquad (1.175)$$

أي إن :

$$R = A \frac{\sin \alpha}{\alpha} \qquad (1.176)$$

وهي النتيجة ذاتها التي توصلنا إليها في المعادلتين (1.171)، (1.172).

ويبين الشكل (١٦ , ١) الكيفية التي تتغير بها (R) مع (α).



الشكل (١٦ , ١) - **تغير** (R) مع (α)

ونلاحظ الآتي بصدد الشكل (١٦ , ١).

١ - (R) تساوي صفراً لجميع قيم (α) التي تطيع العلاقة :

$$\sin \alpha = 0$$

باستثناء الحالة $(\alpha = 0)$. بذلك ، فإن (R) تساوي صفراً عندما تكون :

$$\alpha = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots..$$

٢ - تعرّف $(\sin \alpha)$ بدلالة المتسلسلة اللانهائية الآتية :

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots.. \qquad (1.177)$$

بذلك، فإن:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} - \cdots\cdots \qquad (1.178)$$

وعليه، فإن:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \qquad (1.179)$$

وهكذا، فإن (R) تساوي (A) عند $(\alpha = 0)$.

وبالنظر إلى المعادلة (1.170)، فإن هذه الحالة تنطوي على كون $(\delta = 0)$، أي على كون طائفة المتجهات الصغيرة في الشكل (١٤ , ١) خطاً مستقيما في الاتجاه الأفقي.

٣ - عند $(\alpha = \pm \frac{\pi}{2})$، يكون وتر الدائرة (OD) في الشكل (١٥ , ١) نصف دائرة. وعند $(\alpha = \pm \pi)$، يصبح دائرة كاملة. ثم إنه يصبح دائرة ونصف الدائرة عند $(\alpha = \pm \frac{3}{2}\pi)$، وهلمّ جرّا.

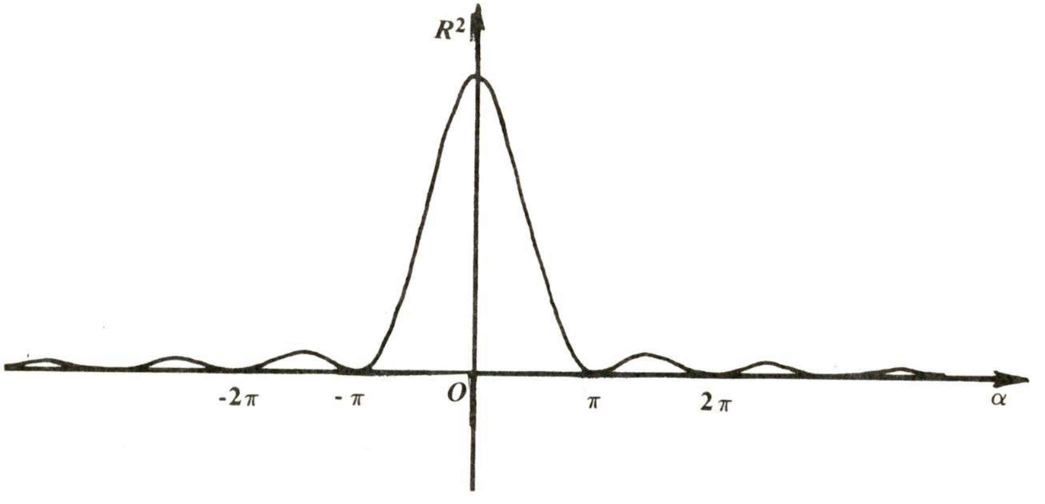
ويجدر الانتباه إلى أن (α) تعتمد بصورة عامة على الموضع المكاني، ومن ثم، فإن الشكل (١٦ , ١) يعكس بصورة أو بأخرى الكيفية التي تتوزع بها (R) مكانيا.

وبصفة خاصة، فإن (α) تتناسب طردياً مع البعد العمودي الموازي للشق الذي يشكل مصدر الحركات التوافقية البسيطة، وذلك إذا كانت الزاوية التي يصنعها الخط الواصل بين مصدر الحركات وبين نقطة التقائها مع الخط الأفقي المار في المصدر صغيرة. بذلك، فإن الشكل (١٦ , ١) يمثّل أيضاً الكيفية التي تتغير بها (R) مع البعد العمودي في المكان.

وإذا اردنا أن نعرف الكيفية التي تتغير بها طاقة الاهتزاز مع (α)، ومن ثم مع البعد الأفقي، كان علينا أن نرسم منحنى (R^2) مقابل (α)، كما بيّنا في البنود السابقة. ويبين الشكل (١٧ , ١) هذا المنحنى.

ويتضح من الشكل (١٧ , ١) أن جزءاً كبيرا من الطاقة يتركز في الفترة الواقعة بين $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ وبين $(\alpha = -\frac{\pi}{2})$، وأن الطاقة تهبط إلى الصفر بصورة دورية وتعود إلى الارتفاع ولكن بصورة متناقصة. وبالنظر إلى ما قلناه عن علاقة (α) مع البعد العمودي، فإن الشكل (١٧ , ١) يمثّل توزيع الطاقة عبر البعد العمودي ويشكل ما يسمى نسقاً

حيودياً Diffraction Pattern. ويتكون النسق الحيودي من بقع ساطعة (في حال الضوء) تتخللها بقع مظلمة، وتكون البقعة المركزية فيه متميزة في سطوعها، كما أن سطوح البقع الساطعة يتناقص بشدة كلما ابتعدنا عن البقعة المركزية.



الشكل (١٧ , ١) - تغير كثافة الطاقة مع ثابت الطور الناتج

(١ , ٨) الاستقطاب

يعدّ مفهوم «الاستقطاب» Polarization من المفهومات الأساسية للنظرية الحديثة في الضوء. فتحديد الاستقطاب هو بمثابة تحديد للاتجاهات التي يتخذها المجالان الكهربائي والمغناطيسي في أثناء انتقال الأمواج الكهرمغناطيسية (كالأمواج الضوئية). وهو يدخل جوهرياً في تحديد الحالة الدينامية للفوتون Photon. ويمكن فهمه بصورة أولية على أساس اجتماع حركتين توافقيتين بسيطتين متساويتي التردد، لكن مختلفتي الاتساع والطور، في اتجاهين متعامدين معاً، وذلك على النحو الآتي:

$$x = a_1 \cos \omega t \tag{1.180}$$

$$y = a_2 \cos(\omega t + \alpha) \tag{1.181}$$

وهما تؤثران في آن واحد على جسيْم معين.

ما هي الحركة الناتجة؟ ما المسار الناتج عن اجتماع هاتين الحركتين؟

لبيان ذلك، ينبغي التعبير عن (y) بدلالة (x) بصورة مباشرة، وذلك بإسقاط العامل المشترك بينهما، أعني الزمن (t)، على النحو الآتي:

نستنتج من المعادلة (1.180) أن:

$$\cos \omega t = \frac{x}{a_1} \qquad (1.182)$$

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1^2}} \qquad (1.183)$$

ويمكن توسيع المعادلة (1.181) على النحو الآتي:

$$\frac{y}{a_2} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha \qquad (1.184)$$

وبالنظر الى المعادلتين (1.182)، (1.183)، فإن:

$$\frac{y}{a_2} = \frac{x}{a_1} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1^2}} \sin \alpha \qquad (1.185)$$

أي:

$$\left(\frac{y}{a_2} - \frac{x}{a_1} \cos \alpha \right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2} \right) \sin^2 \alpha \qquad (1.186)$$

من ثم، فإن:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \qquad (1.187)$$

وهي المعادلة العامة للإهليلج Ellipse.

ولنتدبر المعادلة (1.187) لقيم مختلفة لفرق الطور (α).

١ - في حال:

$$\alpha = 2\pi n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (1.188)$$

في هذه الحال ، تصبح المعادلة (1.187) كالآتي :

$$\left(\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0 \qquad (1.189)$$

أي :

$$y = \frac{a_2}{a_1}\, x \qquad (1.190)$$

وهي معادلة خط مستقيم تحدّره Gradient $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$.

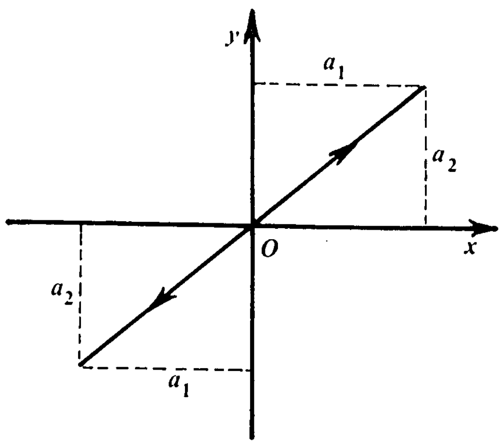
ومعنى ذلك أن الجسيْم المؤثر عليه يتحرك في خط مستقيم ويكون على مسافة قدرها (r) من نقطة الأصل ، حيث :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.191)$$

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\, \cos \omega t \qquad (1.192)$$

أي إن الجسيْم يتحرك حركة توافقية بسيطة اتساعها $(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})$، وترددها (ω) .

ويبين الشكل (١٨ ، ١) حركة الجسيْم في هذه الحال .



الشكل (١,١٨) - حالة $(\alpha = 2\pi n)$

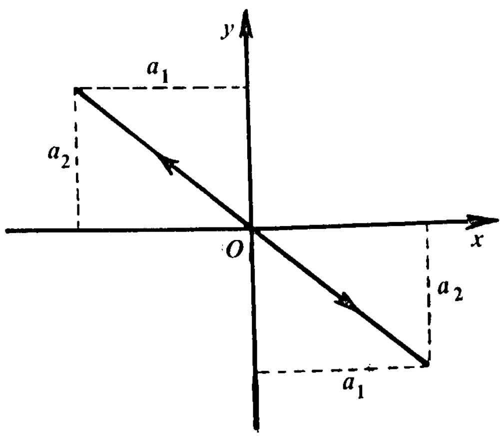
٢ – في حال :

$$\alpha = (2n + 1)\,\pi \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots.) \qquad (1.193)$$

نحصل على :

$$y = -\,\frac{a_2}{a_1}\,x \qquad (1.194)$$

وهي أيضاً معادلة خط مستقيم. لكن التحدّر في هذه الحال هو $\left(-\,\frac{a_2}{a_1}\right)$ ، بحيث تكون حركة الجسيْم كما هو مبين في الشكل (١،١٩).



الشكل (١،١٩) – حالة $(\alpha = (2n + 1)\,\pi)$

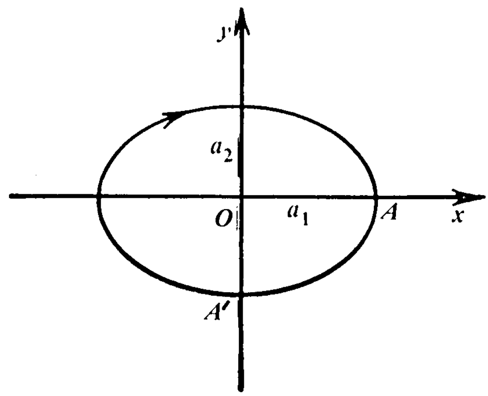
٣ – في حال :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad (1.195)$$

تؤول المعادلة (1.187) إلى الشكل الآتي :

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \qquad (1.196)$$

وهي معادلة إهليلج محوراه Semiaxes يقعان في اتجاهي الإحداثيين الأفقي والعمودي ويساويان اتساعي الحركتين التوافقيتين البسيطتين الأصليتين، على نحو ما هو مبين في الشكل (١ , ٢٠) .



الشكل (١ , ٢٠) - حالة ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

ولمعرفة اتجاه دوران الجسيْم أو المتجه، نعود إلى الحركتين الأصليتين. وفي هذه الحال، تكون الحركتان على النحو الآتي :

$$x = a_1 \cos \omega t \qquad (1.197)$$

$$y = a_2 \cos (\omega t + \frac{\pi}{2}) = - a_2 \sin \omega t \qquad (1.198)$$

بذلك، فعند اللحظة ($t = 0$)، تكون(y) صفراً، فيما تكون (x) مساوية لـ (a_1)، أي إن الجسيْم يكون عند النقطة (A) في الشكل (١ , ٢٠) . وبعد فترة صغيرة لاحقة، تكون (x) بين (O)،(A). أما (y) ، فتكون بين (O) ، (A') . وعليه، فمن الواضح أن الجسيْم يدور في اتجاه حركة عقارب الساعة .

٤ – في حال:

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \tag{1.199}$$

نحصل على الإهليلج ذاته المبين في الشكل (١ , ٢٠)، لكن حركة الجسيْم تكون في هذه الحال في اتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة.

٥ – في حال كون اتساعي الحركتين متساويين $(a_1 = a_2)$ ، وكون $(\alpha = \pm \frac{\pi}{2})$، نحصل على:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{1.200}$$

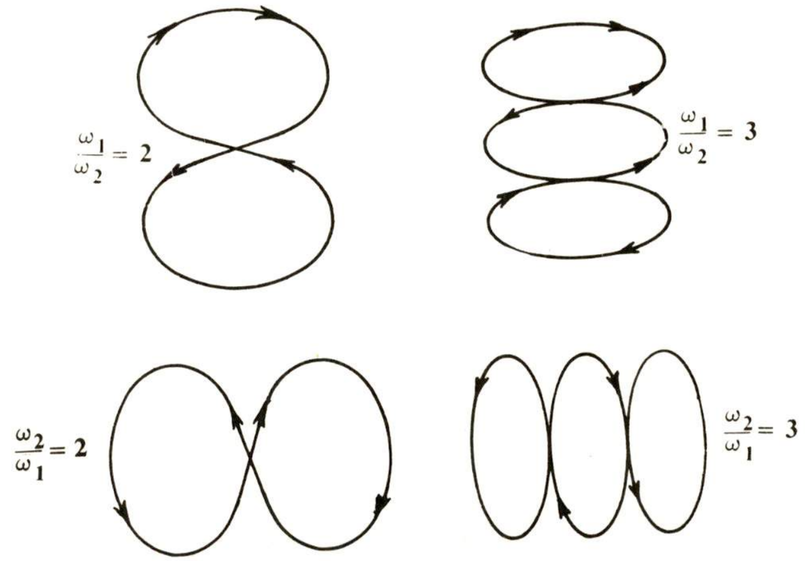
أي إن الجسيْم يتحرك حركة دائرية.

ويمكن استعمال هذه الحالات لإلقاء الضوء على مفهوم الاستقطاب، وهو واحد من المفهومات الأساسية في البصريات، كما أسلفنا. فوفق نظرية الأمواج الكهرَمغناطيسية، يتذبذب المجال الكهربائي (والمغناطيسي أيضا) في سطوح مستوية متعامدة مع اتجاه انتقال الموجة الكهرَمغناطيسية. وعليه، فإنه يمكن اعتبار المجال الكهربائي المتذبذب محصلة اجتماع حركتين دوريتين متعامدتين في سطح مستوٍ واحد.

وفي حال لون ضوئي معين، فإنه يمكن اعتبار هاتين الحركتين الدوريتين حركتين توافقيتين بسيطتين متساويتي التردد، لكن مختلفتي الاتساع وثابت الطور. من ثم، فإن متجه المجال الكهربائي في هذه الحال يتغير ويتحرك في السطح المستوي المتعامد مع اتجاه انتقال الضوء وفق المعادلة (1.187). ويسمى السطح المستوي الذي يتذبذب فيه المجال الكهربائي سطح التذبذب Plane of Oscillation. أما السطح المتعامد مع سطح التذبذب والذي يمر فيه خط انتقال الموجة، فيسمى سطح الاستقطاب Plane of Polarization. ويكون الضوء غير مستقطب Unpolarized إذا كان فرق الطور (α) متغيراً مع الزمن بصورة عشوائية. أما إذا كانت (α) ثابتة، فيقال إن الضوء مستقطب Polarized. وإذا كان فرق الطور بين المركبتين (الحركتين) هو $(\alpha = n\pi, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots))$، أي إذا كانت المحصلة حركة توافقية بسيطة في خط مستقيم في سطح التذبذب كما هو الوضع في الحالتين الأوليين للمعادلة

وكان الضوء خطي الاستقطاب Linear Polarization كان الاستقطاب خطيا ،(1.187) Linearly Polarized . أما في الحالتين الثالثة والرابعة $(\alpha = \pm \frac{\pi}{2})$ ، فيكون الضوء إهليلجي الاستقطاب Elliptically Polarized . بل انه يكون كذلك في معظم حالات المعادلة (1.187). وفي الحالة الخامسة $(a_1 = a_2; \alpha = \pm \frac{\pi}{2})$ ، فإن الضوء يكون دائري الاستقطاب Circularly Polarized .

هذا فيما يتعلق بالتغير في فارق الطور . أما في حال كون الحركتين المجتمعتين مختلفتي التردد ، فإن مسار الجسيْم المتأثر يتخذ أشكالاً متنوعة ومعقدة تسمى أشكال ليساجو Lissajou's Figures . وعلى سبيل المثال ، فإذا كان تردد الحركة الأفقية (ω_1)، وكان تردد الحركة العمودية (ω_2)، وكان فرق الطور بينهما $(\alpha = \frac{\pi}{2})$، فإننا نحصل على الأشكال المعقدة الآتية لنسب مختلفة للترددين .



الشكل (١,٢١) - أشكال ليساجو لـِ $(\alpha = \frac{\pi}{2})$

(١,٩) الضربات Beats

لنتدبر حركتين توافقيتين بسيطتين في الاتجاه ذاته . ولتكن هاتان الحركتان متساويتي

الاتساع ومتساويتي ثابت الطور، لكن مختلفتي التردد. ولنفترض أن الفرق بين الترددين أصغر بكثير من أي من الترددين. في هذه الحال، فإن محصلة الحركتين هي:

$$X = a \cos \omega t + a \cos (\omega + \triangle\omega)\, t \qquad (1.201)$$

حيث ($\triangle\omega$) هي الفرق بين الترددين:

$$\triangle\omega \ll \omega \qquad (1.202)$$

ولما كانت:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(y-x) \cos \frac{1}{2}(y+x) \qquad (1.203)$$

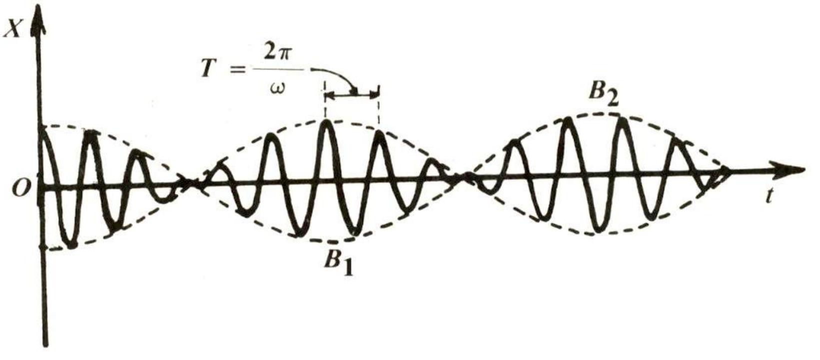
فإن:

$$X = 2a \cos \frac{1}{2} \triangle\omega t \cos \left(\omega + \frac{\triangle\omega}{2}\right) t \qquad (1.204)$$

وبالنظر إلى (1.202)، فإن:

$$X = \left(2a \cos \frac{\triangle\omega}{2} t\right) \cos \omega t \qquad (1.205)$$

ويبين الشكل (٢٢ , ١) تغير هذه الحركة مع الزمن.

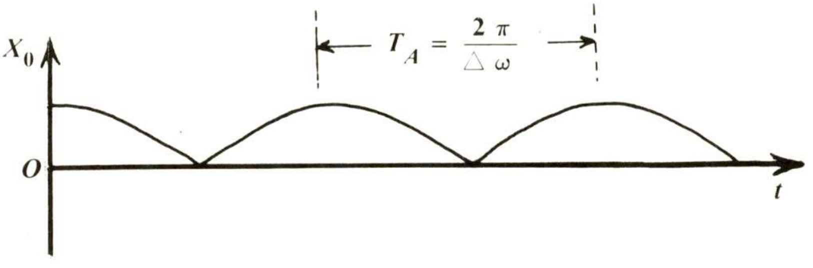


الشكل (٢٢ , ١) – الضربات

ومن الواضح أن الحد الواقع بين قوسيْن في المعادلة (1.205) يتغير ببطء شديد بالنسبة إلى الحد ($\cos \omega t$)، بحيث إنه يبقى ثابتاً تقريبا في الوقت الذي يعاني فيه الحد $\cos \frac{\triangle\omega}{2} t$ عدة ذبذبات توافقية بسيطة. بذلك، فإنه يمكن القول ان الحركة (X) تمثل حركة توافقية بسيطة ترددها (ω) وذات اتساع يتغير مع الزمن بصورة دورية معينة. بيد أننا لا نستطيع اعتبار الحد بين القوسين في (1.205) هو اتساع الحركة (X)، حيث إنه يتغير من ($2A$) إلى ($-2A$)، في حين أن الاتساع هو كمية موجبة بالتعريف. لذلك، فإننا نعتبر الكمية الآتية اتساع الحركة (X):

$$X_0 = \left| 2A \cos \frac{\triangle\omega}{2} T \right| \tag{1.206}$$

ويبين الشكل (١, ٢٣) تغيّر هذه الكمية مع الزمن.



الشكل (١, ٢٣) - تغيّر الاتساع مع الزمن

ويلاحظ ان تردد الاتساع هو ضعف تردد الحد الواقع بين قوسين في (1.205)، أي إنه يساوي الفرق بين ترددي الحركتين الأصليتين ($\triangle\omega$). ويسمى هذا التردد تردد الضربات.

ويجدر الانتباه إلى أن الحد الواقع بين قوسين في المعادلة (1.205) لا يحدد اتساع (X) فحسب، بل إنه يحدد أيضا طور الذبذبات. فهو المسؤول عن كون علامة الذبذبة عند (B_1) هي عكسها عند (B_2) في الشكل (١, ٢٢).

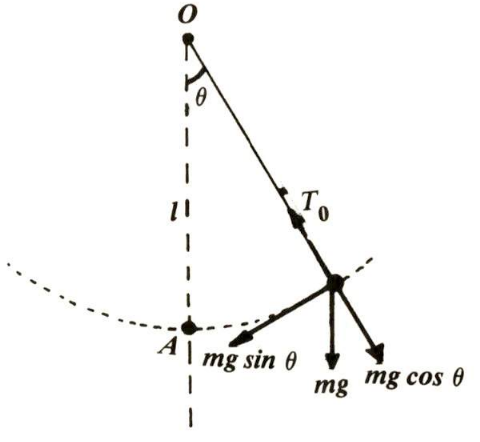
الفصــــل الثانـــي

الحركة التوافقية البسيطة في المختبر والطبيعة

(٢ , ١) مقدمــة

في الفصل السابق، بحثنا الحركة التوافقية البسيطة بوصفها التقريب الأول للحركات الدورية حول مواضع الاتزان. وبينّا أن هذا التقريب ينطبق على الواقع المادي بصورة عامة إذا كانت الإزاحة صغيرة. وفي هذا الفصل، سنستعرض بعض الأنظمة المادية المهمة التي تتوافر فيها شروط الحركة التوافقية البسيطة، وذلك من أجل تعميق فهم القارىء لهذه الحركة وإدراكه لمغزاها وأهميتها الفيزيائية.

(٢ , ٢) البندول البسيط



الشكل (٢ , ١) – البندول البسيط

البندول البسيط هو عبارة عن نقطة كتلية Mass Point معلقة من نقطة مثبتة بخيط مهمل الكتلة. وتتحرك هذه الكتلة تحت تأثير قوة الجاذبية حركة دورية حول موضع الاتزان عند (A) [في الشكل (٢ , ١)] التي تقع على الخط العمودي المار في نقطة التثبيت (O) على مسافة(l) من (O).

وكما هو واضح من الشكل (٢ , ١)، فإن قوة وزن الكتلة المعلقة أو قوة الجاذبية تؤثر عمودياً إلى الأسفل بمقدار (mg) ، حيث (m) هي مقدار الكتلة، (g) تسارع الجاذبية الأرضية. ويمكن تحليل هذه القوة إلى مركبتين، إحداهما$(mg \cos \theta)$تؤثر في اتجاه معاكس لاتجاه قوة الشد في الخيط (T_0) ، والأخرى $(mg \sin \theta)$ تؤثر في اتجاه متعامد مع اتجاه (T_0) وتعمل على إرجاع الكتلة المعلقة إلى موضع الاتزان.

بذلك فإن عزم القوة حول النقطة (O) يساوي :

$$T_R = -(mg \sin \theta)\, l \qquad (2.1)$$

وتدل علامة الناقص في المعادلة على أن القوة المؤثرة هي قوة مرجعة Restoring Force.

وبالتعريف، فإن عزم الزخم يساوي:

$$M = I\dot{\theta} \qquad (2.2)$$

حيث (I) هي عزم القصور الذاتي Moment of Inertia للنظام.

وفي هذه الحال، فإن:

$$I = ml^2 \qquad (2.3)$$

وذلك بالتعريف.

فإذا تدبرنا قانون حفظ الزخم:

$$\frac{dM}{dt} = T_R \qquad (2.4)$$

حصلنا على:

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin\theta \qquad (2.5)$$

أو :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta \qquad (2.6)$$

وبالتعريف ، فإن :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\cdots \qquad (2.7)$$

فإذا كانت (θ) صغيرة ، فإن :

$$\sin\theta = \theta \qquad (2.8)$$

أي :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \qquad (2.9)$$

وتمثل المعادلة (2.9) حركة توافقية بسيطة في (θ) ترددها الزاوي يساوي :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (2.10)$$

ومن ثم ، فإن فترتها الدورية تساوي :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2.11)$$

وهكذا ، فإن المتغير الوحيد الذي تعتمد عليه (T) هو طول الخيط . فهي مثلا لا تعتمد على الكتلة .

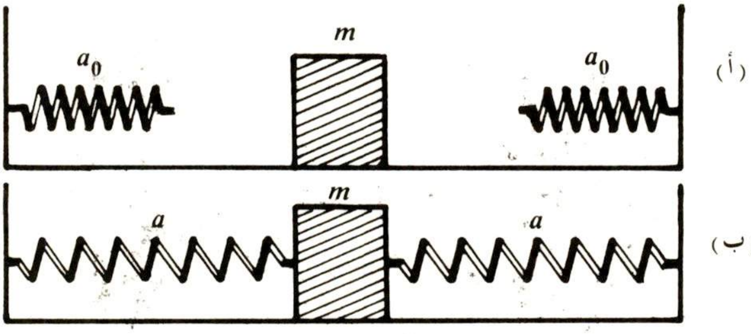
(٣ , ٢) اهتزاز كتلة بين زنبركين (الاهتزازات الطولية)

تدبر زنبركا مهمل الكتلة ثابته (K) وطوله الطبيعي (a_0) .

ونعني بطوله الطبيعي طوله في حال غياب أي تأثيرات خارجية عليه. أما ثابت الزنبرك، فنعني به ثابت التناسب بين قوة الشد وبين الاستطالة في حال تأثير مؤثر خارجي عليه. فإذا كان طوله تحت التأثير الخارجي هو (a)، فان قوة الشد (T_0) تساوي:

$$T_0 = K(a - a_0) \qquad (2.12)$$

تدبر سطحا تام الملوسة (لا يؤثر بقوة احتكاك على الأجسام الملامسة) يقع بين جدارين جاسئين Rigid Walls، وتدبر كتلة على هذا السطح موصولة بالجدارين بوساطة زنبركين مماثلين لبعضهما من النوع المذكور أعلاه، كما هو مبين في الشكل (٢ , ٢ - ب).



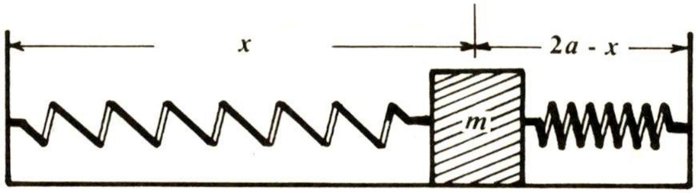
الشكل (٢ , ٢) - كتلة ونبركان بين جدارين جاسئين

في حال الاتزان يكون مقدار قوة الشد في كل زنبرك مساويا لـ $\left(K(a - a_0)\right)$، وتكون القوتان متضادتين في الاتجاه.

إذا أزيحت الكتلة قليلاً إلى اليمين، واعتبرنا المسافة بينها وبين الجدار الأيسر (x)، كانت قوة الشد في الزنبرك الأيسر مساوية لـ $\left(K(x - a_0)\right)$، وكانت في اتجاه $(-x)$، أي في اتجاه تناقص (x) (الاتجاه الأيسر).

أما قوة الشد في الزنبرك الأيمن، فتكون مساوية لـ $\left(K(2a - x - a_0)\right)$، وذلك في اتجاه $(+x)$، أي في اتجاه تزايد (x).

بذلك، فإن محصلة القوة المؤثرة على الكتلة في اتجاه $(+x)$ هي:



الشكل (٣ ,٢) - نظام الكتلة والزنبركين بعد الإزاحة

$$F = -K(x - a_0) + K(2a - x - a_0) \qquad (2.13)$$

$$F = -2K(x - a) \qquad (2.14)$$

حيث $(x-a)$ هي الإزاحة من موضع الاتزان.

ومن قانون نيوتن الثاني، فإن:

$$F = m\ddot{x} = -2K(x - a) \qquad (2.15)$$

وإذا رمزنا إلى الإزاحة من موضع الاتزان بالرمز (y)، بحيث إن:

$$y = x - a \qquad (2.16)$$

فإن:

$$\ddot{y} = -\frac{2K}{m} y \qquad (2.17)$$

أي إن الكتلة تتحرك حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي يساوي:

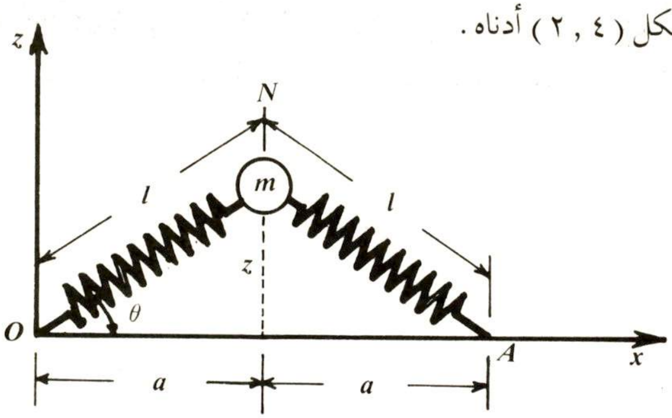
$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}} \qquad (2.18)$$

من ثم، فإن فترتها الدورية تساوي:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}} \qquad (2.19)$$

(٤ , ٢) نظام الكتلة والزنبركين (الاهتزازات المستعرضة)

تدبر الشكل (٤ , ٢) أدناه .



الشكل (٤ , ٢) - الاهتزازات المستعرضة

يعبر الشكل (٤ , ٢) عن النظام المادي ذاته الذي تدبّرناه في البند (٣ , ٢)، أعني نظام الكتلة والزنبركين. لكن إزاحة الكتلة في هذه الحال هي في الاتجاه المستعرض أو العمودي Transverse، أي في اتجاه (z) ، لا في الاتجاه الطولي أو الأفقي (x). كذلك فإننا نفترض أن النظام مقيّد بحيث لا تتذبذب الكتلة إلا في اتجاه (z).

في هذه الحال تؤثر على الكتلة قوتان متساويتان في المقدار. ويبلغ مقدار كل منهما $K[l(z)-a_0]$. وتكون القوة اليسرى في اتجاه $\overrightarrow{NO}$. أما اليمنى فتكون في اتجاه $\overrightarrow{NA}$. بذلك، فإن مركبتيهما الأفقيتين تتضادتان في الاتجاه، ومن ثم تلغيان بعضهما بعضاً. أما المركبتان العموديتان فتكونان في الاتجاه ذاته، ومن ثم تتضامنان معاً لتشكلا قوة مرجعة (F) .

$$F = -2K\,[l(z) - a_0]\,\sin\theta \qquad (2.20)$$

وتعبر علامة الناقص عن كون هذه القوة مرجعة، أي مؤثرة في اتجاه (z) نحو موضع الاتزان.

بيد أن :

$$\sin\theta = \frac{z}{l} \qquad (2.21)$$

كذلك فإن :

$$l = (a^2 + z^2)^{1/2} \qquad (2.22)$$

ومن قانون نيوتن الثاني ، فإن :

$$F = m\ddot{z} \qquad (2.23)$$

بذلك فإن :

$$\ddot{z} = -\frac{2K}{m}\left[1 - \frac{a_0}{l(z)}\right]z \qquad (2.24)$$

$$\ddot{z} = -\frac{2K}{m}\left[1 - \frac{a_0}{a}\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{1/2}\right]z \qquad (2.25)$$

ومن الواضح أن المعادلة (2.24) أو (2.25) لا تمثل حركة توافقية بسيطة ، حيث إن (l) تعتمد على (z). ولكن يمكن توافر شروط تقرب هذه المعادلة من معادلة الحركة التوافقية البسيطة .

ما هي هذه الشروط ؟

هناك ضرب من الزنبركات يمكن مطه من بضعة سنتيمترات إلى بضعة أمتار من دون أن يتم تخطي حدّ مرونته Elastic Limit . وفي هذه الحال ، فإنه يمكن اعتبار $(a \gg a_0)$، ومن ثم اعتبار $(l \gg a_0)$ ، وذلك بالنظر إلى المعادلة (2.22). عند ذاك ، فإن المعادلة (2.24) تأخذ الشكل التقريبي الآتي :

$$\ddot{z} = -\frac{2K}{m}z \qquad (2.26)$$

وهي تمثل حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي يساوي :

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}} \qquad (2.27)$$

ومن ثم ، فإن فترتها الدورية تساوي :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2K}} \qquad (2.28)$$

وهي مماثلة للمعادلة (2.19). ومن ثم، فإن الذبذبات المستعرضة في هذه الحال لا تختلف جوهريا عن الذبذبات الطولية.

بيْد أن هذا الشرط لا يتوافر بصورة عامة، فهو يمثل حالة خاصة جدا. ولكن يمكن بصورة عامة التحكم بالإزاحة العمودية بحيث تكون (z) :

$$z \ll a \qquad (2.29)$$

فإذا مددنا $\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-1/2}$ في المعادلة (2.25) في متتالية تيلر Taylor Series، حصلنا على :

$$\ddot{z} = -\frac{2K}{m}\left[1 - \frac{a_0}{a}\left(1 - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{3}{8}\frac{z^4}{a^4} - \cdots\right)\right] z \qquad (2.30)$$

وبالنظر إلى الشرط (2.29)، فإن المعادلة (2.30) تؤول إلى :

$$\ddot{z} = -\frac{2K}{ma}(a - a_0)\, z \qquad (2.31)$$

وتمثل هذه المعادلة حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي هو :

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{ma}(a - a_0)} \qquad (2.32)$$

ومن ثم، فإن فترتها الزاوية تساوي :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma}{2K(a - a_0)}} \qquad (2.33)$$

ويلاحظ أن التردد يختلف في هذه الحال عنه في حال الذبذبات الطولية. فإذا رمزنا إلى تردد الذبذبات الطولية بالرمز (ω_l) ورمزنا إلى تردد الذبذبات المستعرضة بالرمز (ω_T) ، كانت النسبة بينهما هي :

$$\frac{\omega_T}{\omega_l} = \sqrt{1 - \frac{a_0}{a}} \qquad (2.34)$$

ولما كانت :

$$\sqrt{1 - \frac{a_0}{a}} < 1 \qquad (2.35)$$

فإن :

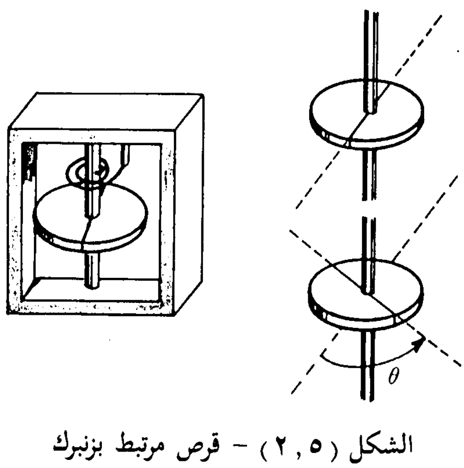
$$\omega_T < \omega_l \qquad (2.36)$$

ومعنى ذلك أن الذبذبات الطولية أسرع تكراراً من الذبذبات المستعرضة.

ولا تقتصر هذه النتيجة المهمة على الذبذبات، بل إنها تصدق أيضاً على الأمواج، حيث إن تردد الأمواج الطولية وسرعتها يختلفان بصورة عامة عن تردد الأمواج المستعرضة وسرعتها في الوسط ذاته.

(٥ , ٢) اهتزازات اللّي Torsional Vibrations

تدبر قرصاً مرتبطا بزنبرك يعيق حركته. فإذا أدير القرص قليلا (بزاوية صغيرة (θ)) بعيداً عن موضع الاتزان، نشأت في الزنبرك قوة مرجِعة تحاول إرجاع القرص إلى هذا الموضع (انظر الشكل (٥ , ٢) أدناه).



الشكل (٥ , ٢) - قرص مرتبط بزنبرك

في هذه الحال تدل التجربة على أن عزم القوة للقرص يتناسب طرديا مع الإزاحة الزاوية (θ)، أي :

$$T_R = I\ddot{\theta} = -K\theta \tag{2.37}$$

حيث (I) هي عزم القصور الذاتي، (K) هي ثابت اللّي Torsional Constant.

بذلك، فإن :

$$\ddot{\theta} = -\frac{K}{I}\theta \tag{2.38}$$

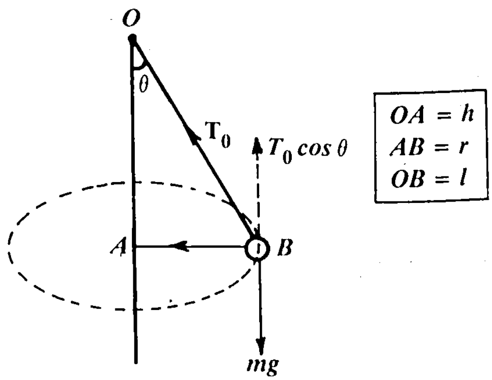
فالحركة إذاً هي حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي يساوي :

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \tag{2.39}$$

والحق أن الساعات الزنبركية مصممة على أساس المعادلة (2.39). إذ يمكن اختيار نظام قرص وزنبرك بعزم قصور ذاتي وثابت لَيّ محددين للحصول على فترة دورية محددة.

(٢,٦) البندول الكروي Spherical Pendulum.

إذا أتيح لكتلة البندول البسيط أن تتحرك في دائرة يقع مركزها على الخط العمودي الواصل بين نقطة التثبيت وبين موضع الاتزان، أي إذا لم تقيَّد حركتها إلى سطح مستوٍ معين، سمي البندول البندول الكروي Spherical Pendulum.



الشكل (٢,٦) - البندول الكروي

إذا حلّلنا قوة الشد($\mathbf{T_0}$) إلى مركّبتين، واحدة عمودية والأخرى أفقية، كانت العمودية مساوية للوزن، وكانت الأفقية مساوية للقوة الجاذبة المركزية، بمعنى أن المركبة الأفقية هي التي تزود الكتلة بقوتها الجاذبة المركزية، ومن ثم بالقدرة على التحرك حركة دائرية.

بذلك، فإن:

$$T_0 \cos\theta = mg \tag{2.40}$$

$$T_0 \sin\theta = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 \tag{2.41}$$

أي إن:

$$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{mr\omega^2}{mg} \tag{2.42}$$

(كما يتضح من الشكل (٦ , ٢)).

وهكذا، فإن:

$$\omega^2 = \frac{g}{h} \tag{2.43}$$

أو:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \tag{2.44}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{2.45}$$

ولكن:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} \tag{2.46}$$

$$h = l\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)^{1/2} \tag{2.47}$$

فإذا كانت :

$$r \ll l \tag{2.48}$$

فإن :

$$h = l$$

للتقريب الأول .

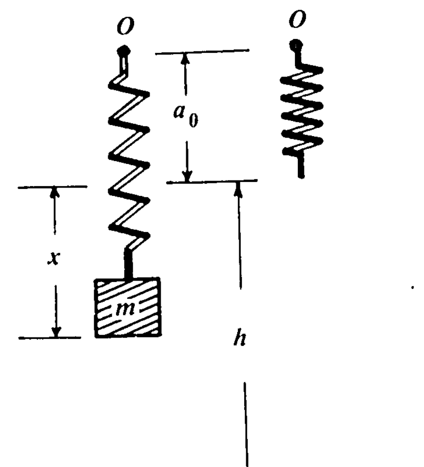
وهكذا ، فإن :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2.49}$$

وهي مماثلة للفترة الدورية للبندول البسيط .

وبالنظر إلى ما قلناه عن العلاقة بين الحركة الدائرية وبين الحركة التوافقية البسيطة في البنود السابقة ، فإنه يمكن القول ان البندول الكروي مكافىء لبندولين بسيطين مماثلين لبعضهما يتحرك كل منهما في سطح مستوٍ يتعامد مع السطح الذي يتحرك فيه الآخر . لذلك ، فإن إسقاط حركة البندول الكروي على جدار عمودي في أي اتجاه يعطي حركة بندول بسيط .

(٢ , ٧) كتلة وزنبرك عمودي تحت تأثير الجاذبية



الشكل (٢ , ٧) - كتلة معلقة من زنبرك تحت تأثير الجاذبية

لنفترض أن كتلة الزنبرك مهملة وأن طوله الطبيعي، في حال انعدام تأثير القوى عليه، هو (a_0) . ولنفترض أن ارتفاع النهاية السفلى للزنبرك عن سطح الأرض هو (h).

إذا علّقنا الكتلة (m) من الزنبرك، فإنها تسقط تحت تأثير الجاذبية. لكن هناك قوة أخرى تؤثر عليها، بل وتزداد كلما زادت مسافة السقوط، وهي القوة المرجِعة Restoring Force، التي يؤثر بها الزنبرك على الكتلة. وتكون النتيجة أن القوتين تتصارعان وتتضادتان بحيث تنتجان نوعاً من الحركة الدورية. وبالنظر إلى الارتباك الذي يقع فيه بعض الطلبة والمعلمين في تحليل هذا النظام، فسنعمد هنا إلى تحليله بالتفصيل، وذلك بالإجابة عن الأسئلة الآتية:

- ★ كيف نستنتج موضع الاتزان لهذا النظام؟
- ★ ما هي الاستطالة القصوى تحت هذه الظروف، أي ما هو الموضع الأدنى الذي تسقط إليه الكتلة؟
- ★ ما هي طبيعة الحركة التي تعانيها الكتلة؟

وينشأ الارتباك في تحليل هذا النظام في العادة من الخلط (او عدم التمييز) بين موضع الاتزان وبين الموضع الأدنى الذي تسقط إليه الكتلة.

في اللحظة التي تكون المسافة التي قطعتها الكتلة قد وصلت الى (x) ، تكون طاقة وضع الكتلة:

$$U(x) = mg(h - x) + \frac{1}{2} Kx^2 \qquad (2.50)$$

حيث إن الحد الأول في الشق الأيمن من المعادلة يمثل طاقة الوضع الجاذبية، ويمثل الحد الثاني طاقة الوضع المخزونة في الزنبرك.

ولما كان موضع الاتزان هو الموضع الذي تكون عنده طاقة الوضع عند حدّها الأدنى، فإنه يحدد كالآتي:

$$\left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{x = x_0} = -mg + Kx_0 = 0 \qquad (2.51)$$

حيث (x_0) هي موضع الاتزان.

أي:

$$x_0 = \frac{mg}{K} \qquad (2.52)$$

وللحصول على الاستطالة القصوى، نتدبر معادلة الطاقة الكلية:

$$W = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mg(h - x) + \frac{1}{2} Kx^2 \qquad (2.53)$$

وبالنظر الى قانون حفظ الطاقة الميكانيكية، فإن:

$$W = mgh \qquad (2.54)$$

وهكذا، فإن:

$$0 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2} Kx^2 \qquad (2.55)$$

ولما كانت الاستطالة القصوى تناظر الحالة ($\dot{x} = 0$)، فإننا نتدبر المعادلة (2.55) عند ($\dot{x} = 0$).

في هذه الحال:

$$x\left(- mg + \frac{1}{2} Kx\right) = 0 \qquad (2.56)$$

وهناك حلان لهذه المعادلة:

$$x = 0; \ \frac{2mg}{K} \qquad (2.57)$$

أما الحل الأول ($x = 0$)، فيمثل مرحلة بدء حركة الكتلة. وأما الحل الثاني، فيمثل الاستطالة القصوى(a).

$$a = \frac{2mg}{K} = 2\,x_0 \qquad (2.58)$$

لاحظ أن الاستطالة القصوى تساوي ضعف المسافة الفاصلة بين موضع الاتزان وبين النهاية السفلى للزنبرك الحر. وقد كان من الضروري توضيح هذه العلاقة بين الطولين، بالنظر إلى أن عدداً من الطلبة والمعلمين يخلطون بينهما ولا يميزون الواحد عن الآخر.

ولنعد الى المعادلة (2.55).

بالنظر إلى المعادلة (2.52)، فإنها تؤول إلى:

$$0 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - Kx_0x + \frac{1}{2} Kx^2 \qquad (2.59)$$

وإذا رمزنا إلى الإزاحة من موضع الاتزان بالرمز (y) ، بحيث إن:

$$y = x - x_0 \qquad (2.60)$$

وعوّضنا عن (x) في (2.59) بدلالة (y)، حصلنا على:

$$0 = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - Kx_0y - Kx_0^2 + \frac{1}{2} Ky^2 + Kx_0y + \frac{1}{2} Kx_0^2 \quad (2.61)$$

أي:

$$\frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} Ky^2 = \frac{1}{2} Kx_0^2 \qquad (2.62)$$

وهي معادلة الطاقة للحركة التوافقية البسيطة.

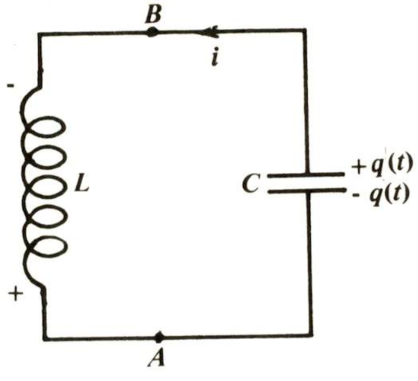
وبالنظر إلى المعادلة (1.118)، فإن المعادلة (2.62) تمثل حركة توافقية بسيطة اتساعها (x_0) وترددها الزاوي $\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)$.

بذلك، فإن الكتلة تظل تتذبذب حول موضع الاتزان حتى تفقد طاقة حركتها (بفعل مقاومة الهواء مثلا). عند ذاك، تستقر الكتلة عند موضع الاتزان. فإذا أعطيت قليلا من الطاقة عند هذا الموضع، تحركت حركة توافقية بسيطة باتساع يتناسب مع هذه الطاقة.

(٢,٨) الذبذبات الكهربائية

تدبر دارة كهربائية بسيطة تتضمن مكثفا كهربائياً متصلا بملف مهمل المقاومة، على

نحو ما هو مبين في الشكل (٨ ,٢).



الشكل (٨ ,٢) - دارة بسيطة

ولنفترض أن الشحنة على الصفيحة العليا (في الشكل) للمكثف في لحظة معينة هي $q(t)$. وبالمقابل، تكون الشحنة في تلك اللحظة على الصفيحة الأخرى هي $(-q)$.

وفي تلك اللحظة يكون الجهد الكهربائي عبر الملف هو:

$$V = -L \frac{di}{dt} \tag{2.63}$$

حيث (L) هي المحاثة الذاتية Self - Inductance للملف.

وتشير علامة الناقص إلى أن الجهد الناشىء في الملف يقاوم الزيادة في التيار.

أما الجهد عبر المكثف، فهو:

$$V = q/C \tag{2.64}$$

ويتضح من الدارة في الشكل (٨ ,٢) أن فرق الجهد بين النقطتين B, A يساوي:

$$V_{BA} = V_B - V_A \tag{2.65}$$

$$V_{BA} = q/C \tag{2.66}$$

$$V_{BA} = -L \frac{di}{dt} \tag{2.67}$$

بذلك ، فإن :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC} q \tag{2.68}$$

بيد أن :

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{2.69}$$

وذلك بالتعريف .

وعليه ، فإن :

$$\ddot{q} = -\frac{1}{LC} q \tag{2.70}$$

وتمثل المعادلة (2.70) تغيّراً توافقيا بسيطا في شحنة المكثف تردده الزاوي يساوي :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{2.71}$$

ومن ثم ، فإن فترته الدورية تساوي :

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \tag{2.72}$$

واعتماداً على المعادلتين (2.63) ، (2.64)، فإن الجهد (V) يطيع معادلة مماثلة للمعادلة (2.70).

أي :

$$\ddot{V} = -\frac{1}{LC} V \tag{2.73}$$

ويمكن مشاهدة هذه الذبذبات الكهربائية إذا وصلنا النقطتين A ، B بجهاز الأسيلوسكوب .

محسن أبو يوسف الموشي

الفصــــل الثالــث

من الاهتزازات إلى الأمـواج

(٣ , ١) الأمواج الجيبية في بعد واحد

لنتدبر تغيّراً توافقيا بسيطا في كمية ما (Ψ) .

$$\Psi(t) = a \cos(\omega t + \phi) \tag{3.1}$$

ولنفترض أن الكمية (Ψ) تمثل متغيّراً لوسط متصل يمتد عبر البعد المكاني (Ψ) ، بحيث إن (x) لا تتغير مع الزمان فحسب، بل تتغير أيضا من نقطة إلى أخرى في المكان، وكأن كل نقطة مكانية تحتوي على متذبذب توافقي بسيط . أي :

$$\Psi = \Psi(x,t) \tag{3.2}$$

ولنفترض أن اعتماد (Ψ) على (x) ينبع فقط من اعتماد (ϕ) على (x) ؛ أي :

$$\Psi(x, t) = a \cos[\omega t + \phi(x)] \tag{3.3}$$

لدينا إذاً حركة توافقية بسيطة في كل نقطة مكانية وفي الآن ذاته. وهذه الحركات مماثلة لبعضها من حيث التردد والاتساع، لكنها مختلفة عن بعضها من حيث ثابت الطور . بيد أن هذا الاختلاف ليس عشوائيا ؛ بمعنى أن هذه المتذبذبات لا تتحرك بمعزل عن بعضها. بل ثمة ترابط بينها ينعكس في كون (ϕ) دالة لـِ (x).

واذا كانت $(\Psi(x, t))$ دورية في (x) ، بالإضافة إلى كونها دورية في (t)، فإن :

$$\Psi (x + \lambda, t) = \Psi (x, t) \qquad (3.4)$$

حيث (λ) هي الطول المناظر لدورة كاملة.
بذلك، فإن :

$$\cos [\omega t + \phi (x + \lambda)] = \cos [\omega t + \phi (x)] \qquad (3.5)$$

ومن الواضح أن أبسط حل للعلاقة (3.5) هو :

$$\phi (x) = \pm \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm kx \qquad (3.6)$$

بذلك، فإن أبسط شكل لـ (Ψ) هو :

$$\Psi (x, t) = a \cos (\omega t \pm kx) \qquad (3.7)$$

وتمثل الدالة (3.7) دالة الموجة الجيبية في بعد واحد، وهي أبسط الأمواج على الإطلاق. وتسمى (λ) طول الموجة. أما (k)، فتسمى العدد الموجي Wave Number.

وبالنظر إلى ما جاء أعلاه، فإنه يمكن القول أن الموجة الجيبية هي حركة توافقية بسيطة في الزمان يتغير ثابت طورها بصورة دورية في المكان.
ولنتفحص الدالة الآتية :

$$\Psi (x, t) = a \cos (\omega t - kx) \qquad (3.8)$$

تدبّر هذه الحركة عند $(x + \delta x)$ ، $(t + \delta t)$.

$$\Psi (x + \delta x, t + \delta t) = a \cos [(\omega t - kx) + (\omega \delta t - k\delta x)] \qquad (3.9)$$

ومن الواضح أن $\left(\Psi(x + \delta x, t + \delta t)\right)$ تكون مساوية لـِ $\left(\Psi(x, t)\right)$ ، إذا كانت (δx) ، (δt) مرتبطتين مع بعضهما بحيث إن :

$$\omega \delta t - k \delta x = 0 \tag{3.10}$$

كيف نفسر ذلك فيزيائياً ؟

إذا اعتبرنا (Ψ) تمثيلاً رياضيا لاضطراب Disturbance في وسط متصل، أمكننا القول أن المعادلة (3.10) تمثل انتقال اضطراب موجي محدد (Ψ) من النقطة (x) إلى النقطة ($x + \delta x$) في اتجاه ازدياد (x) في الفترة الزمنية (δt). كذلك، أمكننا القول أن المعادلة (3.10) تمثل سرعة هذا الانتقال، حيث إن :

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu \tag{3.11}$$

وتمثل (u) في هذه الحال سرعة الاضطراب أو سرعة الموجة. لكنها تسمى في العادة سرعة الطور Phase Velocity ، حيث إنها في الواقع، وكما هو مبين أعلاه، تمثل سرعة انتقال قيمة معينة للطور من مكان إلى آخر.

أما إذا كانت :

$$\Psi(x, t) = a \cos(\omega t + kx) \tag{3.12}$$

حصلنا على النتيجة ذاتها باستثناء تغير المعادلة (3.10) إلى الشكل الآتي :

$$\omega \delta t + k \delta x = 0 \tag{3.13}$$

أو :

$$u = \frac{dx}{dt} = - \frac{\omega}{k} \tag{3.14}$$

وتعني علامة الناقص في (3.14) أن الاضطراب أو الطور ينتقل في اتجاه تناقص (x) ، لا في اتجاه تزايدها. وهكذا، فإن الشكلين الممثلين في (3.8) ، (3.12) لا

يختلفان عن بعضهما إلا من حيث اتجاه انتقال الاضطراب. ففيما تنتقل الموجة (3.8) في اتجاه تزايد (x) ، فإن الموجة (3.12) تنتقل في اتجاه تناقص (x) .

والنقطة المهمة هنا هي أن الموجة الممثلة في المعادلة (3.7) لا تفيد التغير الدوري في المكان والزمان فحسب، بل إنها تفيد أيضا انتقال الاضطرابات أو الطاقة او الإشارات Signals من مكان إلى آخر. ويتضح ذلك بجلاء إذا كتبنا المعادلة (3.8) على النحو الآتي:

$$\Psi(x, t) = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad (3.15)$$

$$\Psi(x, t) = a \cos \omega t' \qquad (3.16)$$

حيث:

$$t' = \left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad (3.17)$$

ومعنى المعادلة (3.16) أن الحركة في جوهرها حركة توافقية بسيطة. أما المعادلة (3.17) فتشير إلى أن الاضطراب في النقطة (x) وفي اللحظة (t) هو الاضطراب نفسه الذي كان في نقطة الأصل Origin في لحظة زمنية في الماضي تفصلها عن اللحظة (t) فترة انتقال الاضطراب من نقطة الأصل إلى النقطة (x) ، أعني الفترة $\left(\frac{x}{u}\right)$. وبتعبير آخر، فإن المعادلة (3.17) تمثل انتقال الاضطرابات الموجية بالسرعة (u). بذلك، فإن الامواج الجيبية ليست سوى تغيّرات (أو اضطرابات) توافقية بسيطة تنتقل من موضع إلى آخر بسرع معينة.

(٣,٢) معادلة الأمواج في بعد واحد

رأينا في الفصل الأول أن المعادلة:

$$y = a \cos \omega t \qquad (3.18)$$

ليست سوى وجه من وجوه المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \qquad (3.19)$$

ورأينا أن عمق المعادلة (3.18) ومغزاها الفيزيائي والرياضي الحقيقي يكمنان في المعادلة (3.19).

وبالنظر إلى التشابه الجوهري الكبير بين المعادلة (3.18) ومعادلة الأمواج الجيبية :

$$\Psi(x, t) = a \cos(\omega t \pm kx) \qquad (3.20)$$

فلا بد أيضا أن تمثل المعادلة (3.20) وجها من وجوه معادلة تفاضلية عامة، على غرار المعادلة (3.19)، تظهر عمق المعادلة (3.20) ومغزاها الرياضي والفيزيائي. فما هي هذه المعادلة؟

لقد توصلنا إلى المعادلة (3.20) في البند (١ , ٣) بتدبر أبسط شكل لـِ (Ψ) في حال تغيرها دوريا في كل من الزمان (t) والمكان (x). وبالنظر إلى الكيفية التي اشتققنا بها الحركة التوافقية البسيطة في الفصل الأول، فمن الواضح أن الدورية في الزمان في المعادلة (3.20) هي وجه من وجوه المعادلة الآتية الشبيهة بالمعادلة (3.19):

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi(x, t) \qquad (3.21)$$

والفرق الوحيد بين المعادلتين (3.19) ، (3.20) هو أن التفاضل في (3.19) تفاضل عادي، في حين أن التفاضل في (3.21) هو تفاضل جزئي Partial Differentiation ، وذلك لكون (Ψ) تعتمد على متغيرين، لا متغير واحد.

أما الدورية المكانية، فهي وجه من وجوه المعادلة التفاضلية الآتية الشبيهة أيضا بالمعادلة (3.21) ، وللأسباب ذاتها التي ذكرناها في مطلع الفصل الأول:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 \Psi(x, t) \qquad (3.22)$$

ومن المعادلتين (3.21) ، (3.22) ، نستنتج أن :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \qquad (3.23)$$

وبالنظر إلى المعادلة (3.11) ، فإن :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.24)$$

هذه هي معادلة الأمواج في بعد واحد والتي تشكل المعادلة (3.20) وجها من وجوهها . فهي بالنسبة إلى الأمواج مثل المعادلة (3.19) بالنسبة إلى الحركة التوافقية البسيطة .

وبالنظر إلى التعدد اللانهائي لحلول (3.24) ، فإن المعادلة (3.20) تشكل عضواً في عائلة لانهائية العدد من الدوال. والحق أن مغزى ما فعلناه أعلاه هو أننا ، بمقارنة الحركة الموجية مع الحركة التوافقية البسيطة ، قدنا أنفسنا من المعادلة (3.20) إلى القاعدة التي تقوم عليها العائلة (أو الطائفة) اللانهائية العدد التي تنتمي إليها المعادلة (3.20) ؛ تلك القاعدة الممثلة بالمعادلة (3.24) . ويمكن الاستدلال على كثير من الملامح المشتركة لأعضاء هذه العائلة من المعادلة (3.20).

ما هو الحل العام للمعادلة (3.24) ، والذي يزودنا بصورة عامة جلية لهذه العائلة ؟

نكتب المعادلة (3.24) كالآتي :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Psi(x, t) = 0 \qquad (3.25)$$

ويمكن التعبير عن ذلك كالآتي :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi(x, 0) = 0 \qquad (3.26)$$

أو :

$$D_- D_+ \Psi(x, t) = 0 \qquad (3.27)$$

حيث :

$$D_- = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad (3.28)$$

$$D_+ = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad (3.29)$$

وسنعمل الآن على كتابة (D_-)، (D_+)، ومن ثم المعادلة (3.25) ، بدلالة المتغيرين الآتيين :

$$t_- = t - \frac{x}{u} \tag{3.30}$$

$$t_+ = t + \frac{x}{u} \tag{3.31}$$

نلاحظ أولاً أن :

$$\frac{\partial}{\partial t_-} = \frac{\partial x}{\partial t_-}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t_-}\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.32}$$

ومن (3.30) ، فإن :

$$\left.\begin{array}{l} x = u(t - t_-) \\ t = t_- + \dfrac{x}{u} \end{array}\right] \tag{3.33}$$

بذلك ، تؤول (3.32) إلى الآتي :

$$\frac{\partial}{\partial t_-} = -u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_-} = -u\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right] \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_-} = -uD_- \tag{3.36}$$

وذلك بالنظر إلى المعادلة (3.28) .

كذلك ، فإن :

$$\frac{\partial}{\partial t_+} = \frac{\partial x}{\partial t_+}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t_+}\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.37}$$

لكـن :

$$\left.\begin{aligned} x &= u(t_+ - t) \\ t &= t_+ - \frac{x}{u} \end{aligned}\right] \tag{3.38}$$

بذلك، تؤول المعادلة (3.37) إلى الآتي :

$$\frac{\partial}{\partial t_+} = u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_+} = u \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right] \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_+} = u D_+ \tag{3.41}$$

بذلك، فإن :

$$\left.\begin{aligned} D_- &= - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t_-} \\ D_+ &= + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t_+} \end{aligned}\right] \tag{3.42}$$

فإذا عوضنا عن (D_-) ،$(D+)$ في المعادلة (3.27) باستخدام (3.42)، حصلنا على :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_- \partial t_+} \Psi(t_-, t_+) = 0 \tag{3.43}$$

فإذا كاملنا المعادلة (3.43) بالنسبة إلى المتغير (t_-)، حصلنا على :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_+} = C(t_+) \tag{3.44}$$

حيث $\left(C(t_+)\right)$ دالة اعتباطية Arbitrary للمتغير (t_+)، فقط.

فإذا كاملنا المعادلة (3.44) بالنسبة إلى المتغير (t_+) ، حصلنا على :

$$\Psi(t_-, t_+) = \int_{t_+} C(t_+)\, dt_+ + f_-(t_-) \qquad (3.45)$$

حيث $(f_-(t_-))$ دالة اعتباطية للمتغير(t_-)فقط .

بذلك فإن :

$$\Psi(t_-, t_+) = f_+(t_+) + f_-(t_-) \qquad (3.46)$$

فإذا استعنّا بالمعادلة (3.30) ، (3.31) للتعويض عن (t_-) ، (t_+) بدلالة (x) ، (t) ، آلت المعادلة (3.47) إلى الشكل الآتي :

$$\Psi(x, t) = f_+\left(t + \frac{x}{u}\right) + f_-\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad (3.47)$$

أو :

$$\Psi(x, t) = f_1(x + ut) + f_2(x - ut) \qquad (3.48)$$

وإذا حلّلنا المعادلة (3.48) على نحو ما فعلناه مع الموجات الجيبية في المعادلات (3.8) إلى (3.14) ، تبيّن لنا أن$(f_1(x + ut))$ يمثل اضطراباً اختيارياً Arbitrary (أي، ليس بالضرورة اضطراباً توافقياً بسيطاً) ينتقل بالسرعة(u) في اتجاه تناقص (x) ، وأن $(f_2(x - ut))$ يمثّل اضطراباً اختياريا ينتقل بالسرعة(u) في اتجاه تزايد ،(x). وهكذا يتسع مفهوم الموجة ليشمل انتقال أي اضطراب متصل في المكان .

ولكن ينبغي التنبيه إلى أن الحل الذي أجريناه يفترض أن السرعة (u) ثابتة في المكان والزمان . أما إذا كانت (u) دالة للمتغيرين(x)، (t) ، فإن المعادلة (3.48) لا تشكل حلا للمعادلة (3.25) ، بل يكون الحل العام أعقد من ذلك بكثير .

(٣ , ٣) الأمواج الموقوفة Standing Waves

في البند (١ , ٣) توصلنا إلى دالة الأمواج الجيبية في بعد واحد بتدبر حركة توافقية بسيطة يتغير ثابت طورها دوريا في المكان. ولكن، ماذا لو اعتبرنا الاتساع، لا ثابت

الطور، هو مكمن الدورية في المكان؟ أي، ماذا لو أبقينا ثابت الطور ثابتاً في المكان، وجعلنا الاتساع يتغير دوريا من نقطة إلى أخرى؟

في هذه الحال، فإن :

$$\Psi (x, t) = a (x) \cos (\omega t + \phi) \qquad (3.49)$$

$$a (x + \lambda) = a (x) \qquad (3.50)$$

وبالنظر إلى ما جاء في مطلع الفصل الاول، فإن أبسط حل للمعادلة (3.50) يتمثل في المعادلة الآتية:

$$\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^2} = - k^2 a (x) \qquad (3.51)$$

حيث :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (3.52)$$

وكما بينا في الفصل الأول، فإن الحل العام للمعادلة (3.51) هو :

$$a (x) = A \sin kx + B \cos kx \qquad (3.53)$$

وهكذا، فإن :

$$\Psi(x, t) = [A \sin kx + B \cos kx] \cos (\omega t + \phi) \qquad (3.54)$$

بيْد أن المغزى الفيزيائي للمعادلة (3.54) لا يبرز إلا في ضوء الشروط الحدية Boundary Conditions للمسألة. فإذا افترضنا أن الحركة الممثلة بالمعادلة (3.54) مقصورة على طول محدود ومحدد (L) ، بحيث تنتفي الحركة خارج إطار هذا الامتداد، وإذا افترضنا أن الحد الأيسر لهذا الامتداد هو $(x = 0)$، ومن ثم بأن الحد الأيمن هو $(x = L)$ ، فإن :

$$\Psi (0, T) = 0 \qquad (3.55)$$

$$\Psi(L, t) = 0 \tag{3.56}$$

وتمثل المعادلتان (3.55) ، (3.56) الشروط الحدية للمسألة.

من المعادلتين (3.54) ، (3.55) ، فإن :

$$B \cos(\omega t + \phi) = 0 \tag{3.57}$$

من ثم، فإن :

$$B = 0$$

أي :

$$\Psi(x, t) = A \sin kx \cos(\omega t + \phi) \tag{3.58}$$

ومن المعادلتين (3.56) ، (3.58) ، فإن :

$$A \sin kL \cos(\omega t + \phi) = 0 \tag{3.59}$$

أي :

$$\sin kL = 0 \tag{3.60}$$

وهذا يعني أن :

$$kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots.., n\pi \tag{3.61}$$

بذلك ، فإن :

$$\lambda = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3\ldots.) \tag{3.62}$$

أو :

$$\lambda = 2L, L, \frac{2}{3}L, \frac{L}{2}, \ldots. \tag{3.63}$$

ويجدر الانتباه إلى أن الدالة (3.58) تطيع معادلة الأمواج (3.24) إذا كانت :

$$u = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \qquad (3.64)$$

بيْد أن (u) لا تعني سرعة الطور في هذه الحال، فالطور في لحظة ما هو نفسه في جميع النقط، بمعنى انه لا يتغير في المكان. وكما سنبين لاحقاً حين نستعرض أنظمة مادية محددة، فإن الكمية (u) هي كمية لها أبعاد السرعة وتعتمد على الخصائص القصورية والمرنة للوسط المهتز (مثلا كثافة الوتر وقوة الشد فيه).

من ذلك يتضح أن:

$$\nu = \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots., n\nu_1 \qquad (3.65)$$

حيث:

$$\nu_1 = \frac{u}{2L} \qquad (3.66)$$

وانسجاماً مع ما جاء في مطلع الفصل الأول، فان (ν_1) تسمى التردد الأساسي (الأولي) Fundamental Frequency في حين تسمى $(2\nu_1)$, $(3\nu_1)$ إلخ.. التوافقيات Harmonics الثانية والثالثة إلخ ... للتردد الأساسي.

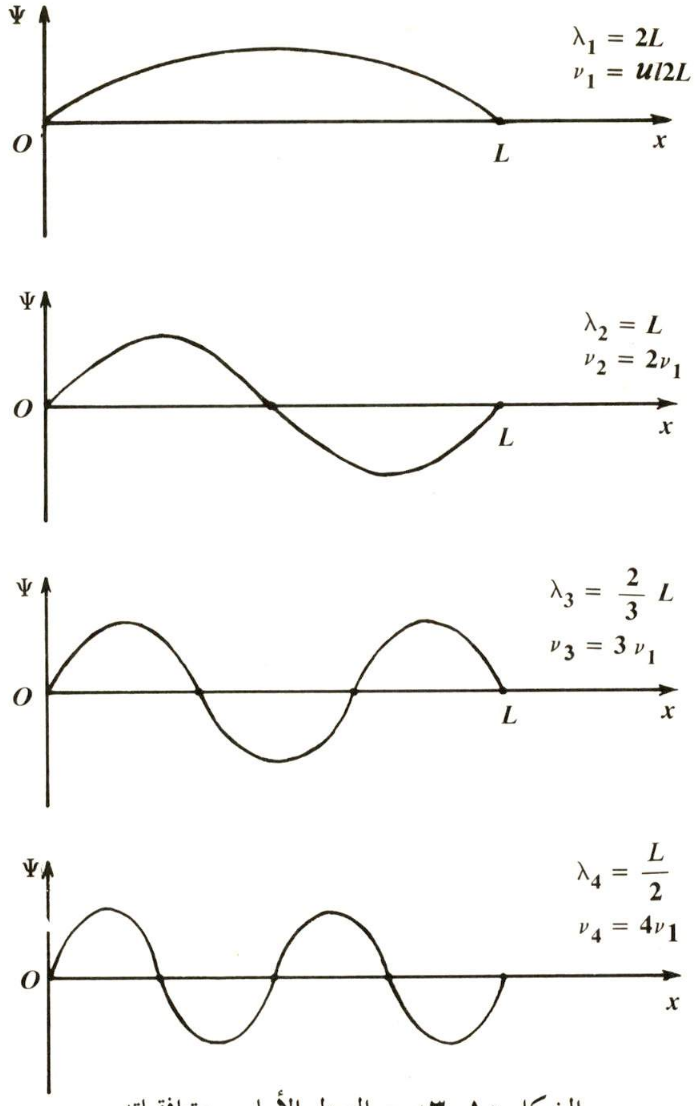
ويسمى كل اهتزاز من هذه الاهتزازات نمطا اهتزازياً Vibrational Mode للوسط أو الطول المعني.

ويبين الشكل (٣,١) أشكال بعض هذه الأنماط، بما في ذلك شكل النمط الأساسي.

ولنعد إلى المعادلة (3.58).

إن «الاتساع» يتغير جيبياً. بذلك، فإن هناك بعض النقط التي تبقى ثابتة ولا تتحرك على الاطلاق في جميع الأزمان. وتتحدد هذه النقط بالعلاقة الآتية:

$$\left.\begin{aligned} &\sin kx_0 = 0 \\ &x_0 = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots. \end{aligned}\right] \qquad (3.67)$$



الشكل (١ , ٣) – النمط الأساسي وتوافقياته

وتسمى هذه النقط العقد Nodes . أما النقط التي تصل عندها الازاحة (Ψ) حدّها الأقصى أو حدّها الأدنى، فتسمى ضديدة العقد Antinodes . لذلك، ولوجود العقد، تسمى الحركات الممثلة بالمعادلة (3.58) الأمواج الموقوفة .

والآن إذا قارنّا المعادلة (3.58) مع المعادلة (1.205) ، التي تمثل الضربات Beats ، تبين لدينا أنهما من صنف واحد وأن لهما بنية رياضية واحدة، الأمر الذي يشير إلى إمكانية

تركيب الأمواج الموقوفة من أمواج جيبية منتقلة Travelling على غرار ما فعلناه مع الضربات. وهذا ما يشير إليه أيضا تحليل الحركة الدورية الوارد في مطلع الفصل الأول.

نتصور موجات جيبية منتقلة تتحرك في اتجاه تزايد (x)، وأخرى تتحرك في اتجاه تناقص (x)، ونفترض أن الطائفتين متساويتا الاتساع والتردد والطول الموجي وأن فرق الطور بينهما هو (π). بذلك، فإن محصلة الطائفتين من الأمواج هي :

$$\Psi(x, t) = a[\sin(\omega t + kx + \phi) - \sin(\omega t - kx + \phi)] \qquad (3.68)$$

بيد أن :

$$\sin X_0 - \sin Y_0 = 2 \sin \frac{X_0 - Y_0}{2} \cos \frac{X_0 + Y_0}{2} \qquad (3.69)$$

إذاً، فإن :

$$\Psi(x, t) = 2a \sin kx \cos(\omega t + \phi) \qquad (3.70)$$

$$\Psi(x, t) = A \sin kx \cos(\omega t + \phi) \qquad (3.71)$$

وهي معادلة الأمواج الموقوفة.

والحق أن الوضع المبين في المعادلة (3.68) ينشأ حين تنعكس أمواج جيبية منتقلة انعكاساً كليا عند حد معين، فتتداخل الأمواج الأصلية مع الأمواج المنعكسة.

ولنعد إلى الأنماط الاهتزازية المبينة في الشكل (٣,١). إن كل نسق من هذه الأنساق يطيع معادلة الأمواج (3.24). ولما كانت المعادلة (3.24) خطية Linear في الإزاحة (Ψ)، فإن مجموع هذه الأنماط يطيع أيضاً هذه المعادلة، أي إن المتتالية الآتية تطيع (3.24) :

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) = A_1 \sin k_1 x \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin k_2 x \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ + \cdots + A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \phi_n) \qquad (3.72)\end{aligned}$$

وهي في الواقع شكل من أشكال المعادلة (1.68)، والتي تمثل متتالية فورييه Fourier Series. ويمكن تحديد هذا الحل كليا بتحديد شروطه الابتدائية؛ مثلاً بتحديد الدالتين

$\left(\frac{\partial\Psi(x, 0)}{\partial t}\right), \left(\Psi(x, 0)\right)$.

وعلى سبيل المثال، تَدبّر الشرطين الآتيين:

$$\Psi(x, 0) = \theta(x) \qquad (3.73)$$

حيث $\left(\theta(x)\right)$ دالة بطيئة التغيير في (x) ،

$$\frac{\partial\Psi(x, 0)}{\partial t} = 0 \qquad (2.74)$$

ويعني هذان الشرطان أننا نبدأ من شكل للطول أو الوتر المعني غير شكل الاتزان (الخط الأفقي المستقيم)، وأن سرع نقط (أو أجزاء) الطول أو الوتر تكون جميعاً صفراً عند $(t = 0)$.

إذاً :

$$\frac{\partial\Psi(x, 0)}{\partial t} = 0 = -\sum_i A_i\,\omega_i \sin k_i x \sin\phi_i \qquad (3.75)$$

ولما كانت هذه العلاقة تنطبق عند جميع النقط المكانية، فإن :

$$\sin\phi_i = 0 \qquad (3.76)$$

ويمكن اعتبار :

$$\phi_i = 0 \qquad (3.77)$$

من دون إخلال بعمومية النتيجة، حيث إن اعتبار (ϕ_i) مساوية لـِ (π) مثلاً لا يغير من النتيجة في شيء إلا بإضفاء علامة $(-)$ على الثوابت الاختيارية (A_i).

وهكذا ، فإن :

$$\Psi(x, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \sin k_i x \cos\omega_i t \qquad (3.78)$$

إذاً ، فإن :

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \sin k_i x \qquad (3.79)$$

وبالنظر إلى المعادلة (3.63)، فإن :

$$\theta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \sin mk_1 x \qquad (3.80)$$

حيث :

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L} \qquad (3.81)$$

وتمثل المعادلة (3.80) شكلاً من أشكال متسلسلة فورييه للبعد المكاني . ولما كانت $(\theta(x))$ تمثل أي دالة بطيئة التغيير في (x) ، فإن المعادلة (3.80) تمثل شكلاً من أشكال نظرية فورييه ، والتي تنص على أي دالة دورية Periodic وبطيئة التغيير ضمن حدود معينة يمكن التعبير عنها بدلالة الجمع المبين في المعادلة (3.80) .

وكما فعلنا في المعادلات (1.49) إلى (1.68)، فإنه يمكن التعبير عن (A_m) بدلالة $(\theta(x))$ على النحو الآتي :

$$A_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_0^{\lambda_1} \theta(x) \sin mk_1 x \, dx \qquad (3.82)$$

بذلك ، فإن معرفة $(\theta(x))$ تكفي لتحديد جميع الثوابت (A_m). وبتعبير آخر ، فإنه يمكن تحديد $(\Psi(x, t))$ كلياً بتحديد الشرطين الابتدائيين المذكورين .

(٣ , ٤) الأنماط الاهتزازية Vibrational Modes

حين تناولنا الأمواج الموقوفة في البند السابق ، فإننا تدبّرنا نظاماً مثالياً Ideal System ، هو في الواقع وتر مثالي منتظم الكثافة والشد انتظاماً تاما . وقد بينا أن الحل العام للأمواج الموقوفة في مثل هذا الوتر هو مجموع ما أسميناه الأنماط الاهتزازية للوتر .

ما الذي يميز كل نمط من هذه الأنماط ؟ ما هي محدداته ؟ وما هو مغزاه الدينامي ؟

للإجابة عن هذه الأسئلة، فإننا نتصور الوتر على أنه مجموعة لامتناهية من الأجزاء اللامتناهية الصغر المترابطة معاًوالمتحركة. ونؤكد هنا على ترابط هذه الأجزاء معاً. فلولا هذا الترابط لجاءت اهتزازاتها عشوائية ولعالجنا كل حركة على حدة. وعلى هذا الأساس، تبرز خصوصية النمط الاهتزازي على أنها تتمثل في تحرك أجزاء الوتر حركة توافقية بسيطة بالتردد ذاته وبثابت الطور ذاته. وتبرز أهميته من أن حركة الوتر، مهما تعقدت، يمكن التعبير عنها بدلالة مجموع من الأنماط الاهتزازية، كما هو مبين في المعادلة (3.72).

والحق أن هذه السمة يشترك فيها الوتر المثالي المتصل والمكون من عدد لامتناهٍ من الأجزاء مع الأنظمة غير المتصلة والمكونة من عدد محدود من الأجزاء. فهي سمة جوهرية تظل قائمة عند حد الاتصال Limit of Continuity، أي عند حد الانتقال من الأنظمة المحدودة الأجزاء إلى الوتر اللامحدود الأجزاء.

ولبيان ذلك، فسنعالج بعض الأنظمة المكونة من أكثر من جزء متحرك، ونوضح كيف تقود هذه الحركات إلى الأمواج الموقوفة عند حد الاتصال.

نبتدىء بنظام مكون من جزئين مترابطين معاً بحيث تؤثر حركة الواحد على الآخر. ونفترض أننا نتعامل مع إزاحات صغيرة للجزئين بحيث يمكن إهمال مربع هذه الإزاحات وقواها الأعلى. وفي هذه الحال، وإذا رمزنا إلى إزاحة الجزء الأول بالرمز (x_1) ورمزنا إلى إزاحة الثاني بالرمز (x_2)، فإن تحليل النظام على غرار ما فعلناه في الفصل الأول في المعادلة (1.69) يقود إلى العلاقتين الآتيتين لطاقتي الوضع والحركة:

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j \qquad (3.83)$$

حيث (U) هي طاقة الوضع، (α_{ij}) مجموعة من الثوابت.

$$E_K(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \beta_{ij}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_j \qquad (3.84)$$

حيث (E_K) هي طاقة الحركة، (β_{ij}) مجموعة من الثوابت.

وباستعمال قوانين الميكانيكا، فإنه يمكن بيان أن تسارع كل جزء، في هذه الحال، لا يعتمد سوى على القوة الأولى للإزاحتين. وبتعبير أدق، فإن تسارع كل جزء يساوي،

في هذه الحال، مزيجاً خطيا Linear Combination للإزاحتين.

أي:

$$\ddot{x}_i = -\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, x_j \qquad (i = 1, 2) \qquad (3.85)$$

ومعنى ذلك أن:

$$\ddot{x}_1 = -a_{12}\, x_1 - a_{12}\, x_2 \qquad (3.86)$$

$$\ddot{x}_2 = -a_{21}\, x_1 - a_{22} x_2 \qquad (3.87)$$

وتنبع صعوبة حل هاتين المعادلتين من كونهما مترابطتين، بحيث إن حل الواحدة يفترض حل الأخرى. ما السبيل إذاً إلى حلهما؟

بالنظر إلى معالجتنا للأمواج الموقوفة في البند السابق، فإنه من الطبيعي أن نلجأ إلى مفهوم النمط الاهتزازي لحل المعادلتين، بمعنى أن نفترض وجود أنماط اهتزازية لهذا النمط من الأنظمة المادية.

وعلى هذا الأساس، نفترض أن:

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \phi) \qquad (3.88)$$

لاحظ ان(ω)، (ϕ) هما ذاتهما لكلا الجزئين المتحركين.

أي:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi); \; x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi) \qquad (3.89)$$

وبالتعويض عن (x_1)، (x_2) في المعادلتين (3.86)، (3.87)، نحصل على:

$$(a_{11} - \omega^2)\, A_1 + a_{12}\, A_2 = 0 \qquad (3.90)$$

$$a_{21} A_1 + (a_{22} - \omega^2)\, A_2 = 0 \qquad (3.91)$$

ومن الواضح أن :

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{a_{11} - \omega^2}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22} - \omega^2} \qquad (3.92)$$

أي :

$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}\, a_{21} = 0 \qquad (3.93)$$

وكان يمكن أن نصل إلى النتيجة ذاتها باعتبار محدد Determinant ثوابت المعادلتين المتجانستين الخطيتين (3.90)، (3.91) صفراً ؛ أي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.94)$$

ومن الواضح أن المعادلة (3.93) هي معادلة تربيعية في المتغير (ω^2) . من ثم، فإن هناك حلّيْن للمعادلة – (ω_1^2) ، (ω_2^2) . وتسمى (ω_2) ، (ω_1) ، الترددين الطبيعيين للنظام المعني Natural Frequencies . ويناظر كل تردد من هذين الترددين نمطاً اهتزازياً . بذلك فإن للنظام المعني نمطين اهتزازيين هما :

$$\left.\begin{aligned} (1)\ x_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1);\ x_2^{(1)} = A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ (2)\ x_1^{(2)} &= A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2);\ x_2^{(2)} = A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}\right] \qquad (3.95)$$

ويشير الرقم الواقع بين قوسين إلى رقم النمط الاهتزازي . أما الرقم الآخر غير الواقع بين قوسين، فيشير إلى رقم الجزء المتحرك (أو البعد أو درجة الحرية) . وتتحدد ثوابت المعادلات (3.95) كليا بتحديد الشروط الابتدائية للإزاحات والسرع .

ويمكن التعبير عن الحل العام بدلالة تراكب Superposition للنمطين :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 &= A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}\right] \qquad (3.96)$$

ويمكن تعميم هذه النتائج لأي عدد محدود من الأجزاء المترابطة على النحو الآتي :

إذا كان عدد الأجزاء المتحركة هو (n)، تغدو المعادلة (3.85):

$$\ddot{x}_i = - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (3.97)$$

أي :

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_1 = - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \cdots - a_{1n} x_n \\ \ddot{x}_2 = - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 - \cdots - a_{2n} x_n \\ \vdots \\ \ddot{x}_n = - a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \cdots - a_{nn} x_n \end{array}\right] \qquad (3.98)$$

من ثم، تغدو معادلات الترددات الطبيعية (3.94) كالآتي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.99)$$

ولهذه المعادلة (n) من الحلول للمتغير (ω^2). بذلك، فإن هناك (n) من الترددات الطبيعية يناظر كل منها نمطاً اهتزازياً. وعلى غرار المعادلة (3.95)، فإننا نعبر عن النمط الاهتزازي رقم(i)على النحو الآتي :

$$x_1^{(i)} = A_1^{(i)} \cos(\omega_i t + \phi_i), \ldots, x_n^{(i)} = A_n^{(i)} \cos(\omega_i t + \phi_i) \qquad (3.100)$$

كذلك، فإننا نعبّر عن الحل العام للجزء رقم (m) كالآتي :

$$x_m = \sum_{i=1}^{n} A_m^{(i)} \cos(\omega_i t + \phi_i) \qquad (3.101)$$

ونلاحظ أن المعادلة (3.101) تعرف في الواقع مجموعة جديدة من الإحداثيات يمكن أن تشكل بديلاً للمجموعة القديمة (x_i). وتمثل المجموعة الجديدة العلاقة الآتية :

$$q_i = d_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.102)$$

بحيث تغدو المعادلة (3.101) :

$$x_m = \sum_{i=1}^{n} c_{mi} q_i(t) \qquad (3.103)$$

وبالمقابل، فإن :

$$q_m(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{mi}\, x_i\,(t) \qquad (3.104)$$

وهكذا، فإن الواحدة تشكل تحويلاً خطياً Linear Transformation للأخرى.

وتتميز (q_i) في أنها تطيع المعادلات الآتية :

$$\ddot{q}_i = -\,\omega_i^2\, q_i \qquad (i = 1,2, \ldots\ldots, n) \qquad (3.105)$$

كما يتضح من المعادلة (3.102).

ومعنى المعادلة (3.105) أن كل إحداثي من المجموعة (q_i) يعاني حركة توافقية بسيطة مستقلة كليا عن حركات الإحداثيات الأخرى في المجموعة. وإذا قارنا المعادلة (3.105) مع المعادلة (3.97)، تبيّن لنا أن مغزى التحويل الممثل في المعادلتين (3.103)، (3.104) يتمثل في تحويل المعادلات (3.97) المتشابكة والمترابطة معا بصورة معقدة إلى المعادلات (3.105) المستقلة عن بعضها. وهكذا، فإن هذا التحويل هو وسيلة للتعبير عن الحل العام بدلالة مجموعة من الحركات التوافقية البسيطة. وتسمى الإحداثيات (q_i) الإحداثيات العادية Normal Coordinates. وبصورة عامة، فإنه ليس من السهل تخمين هذه الإحداثيات من الاحداثيات الأصلية. لكنه من الممكن تخمينها في بعض المسائل، وهذا يسهّل كثيراً في حل هذه المسائل. ويجدر التنبيه إلى أن ذلك كله ينعكس في التعبير الرياضي للطاقة. فإذا عبّرنا عن الطاقة بدلالة الإحداثيات العادية، حصلنا على مجموع لطاقات عدد من الحركات التوافقية البسيطة المستقلة عن بعضها.

وتبرز أهمية الإحداثيات العادية إذا طرحنا المسألة على النحو الآتي :

لدينا المعادلة (3.97). ولنفترض أننا لا نعرف حلّها. كيف نحولها إلى المعادلة (3.105)؟

يكمن كتابة المعادلة (3.97) بدلالة المصفوفات على النحو الآتي :

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -A\,\mathbf{x}(t) \qquad (3.106)$$

حيث :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad (3.107)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.108)$$

ولنتدبر مجموعة جديدة من الإحداثيات (q_i) ترتبط بالمجموعة القديمة (x_i) على النحو الآتي :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, q_j(t) \qquad (3.109)$$

حيث (c_{ij}) مصفوفة من الثوابت .

وبدلالة المصفوفات ، فإن :

$$\mathbf{x} = C\,\mathbf{q} \qquad (3.110)$$

حيث :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \qquad (3.111)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.112)$$

فإذا عوضنا عن $(\mathbf{x})$ في المعادلة (3.106) باستعمال (3.110)، حصلنا على :

$$C\,\ddot{\mathbf{q}} = -\,AC\mathbf{q} \qquad (3.113)$$

أي :

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\,C^{-1}AC\mathbf{q} \qquad (3.114)$$

وإننا لنختار (C) بحيث إن :

$$C^{-1}\,AC = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \gamma_3 \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix} \qquad (3.115)$$

ومن الواضح أن :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n \end{pmatrix} = (\gamma_i\delta_{ij}) \qquad (1.116)$$

حيث (δ_{ij}) دلتا كرونيكر المعرّفة في الفصل الأول .

والآن ، إذا ضربنا كلا حدي المعادلة (3.115) بالمصفوفة (C) من جهة اليسار ، حصلنا على :

$$AC = C\,(\gamma_i\delta_{ij}) \qquad (3.117)$$

أي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,\gamma_j\,\delta_{jk} \qquad (3.118)$$

$$= c_{ik}\,\gamma_k = \sum_{j=1}^{n} \gamma_k\,\delta_{ij}\,c_{jk} \qquad (3.119)$$

وذلك بالنظر إلى طبيعة دلتا كرونيكر .

وعليه ، فإن :

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \gamma_k\,\delta_{ij})\,c_{jk} = 0 \qquad (3.120)$$

وتمثل (3.120) (n) معادلة متجانسة وخطية تتضمن (n) مجهول . أي :

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \gamma_k)\,c_{1k} + a_{12}\,c_{2k} + \cdots\cdots + a_{1n}\,c_{nk} = 0 \\ a_{21}\,c_{1k} + (a_{22} - \gamma_k)\,c_{2k} + \cdots\cdots + a_{2n}\,c_{nk} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\,c_{1k} + a_{n2}\,c_{2k} + \cdots\cdots + (a_{nn} - \gamma_k)\,c_{nk} = 0 \end{array}\right] \qquad (3.121)$$

ومن المعروف في الرياضيات أنه حتى يكون للمعادلات (3.121) حلول مغايرة للصفر ، فإنه ينبغي ويكفي أن يكون محدد Determinant معاملات المعادلات صفراً ، أي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \gamma_k & a_{12} \;\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \gamma_k \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} - \gamma_k \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.122)$$

والحق أن العلاقة (3.122) هي مماثلة تماماً للعلاقة (3.99). من ثم ، فإن الحلول البالغ عددها (n) للمتغير (γ_k) هي في الواقع مربعات الترددات الطبيعية (ω_k^2).

أي :

$$\nu_k = \omega_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.123)$$

وبالنظر إلى المعادلات (3.115)، (3.116) ، (3.123) ، تغدو المعادلة (3.114) :

$$\ddot{q}_i = -\omega_i^2 q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.124)$$

وهو التحويل المطلوب . وتكمن أهمية هذه الطريقة في أنها لا تفترض الحل مسبّقاً ، بل إنها توصل المرء إليه . وهناك بالطبع شروط رياضية وأخرى فيزيائية متعلقة بالطاقة لهذا الحل . لكننا آثرنا ألا نتطرق إليها وأن نكتفي ببيان الخطوط العريضة للحل .

(٣ , ٥) علاقات التشتت Dispersion Relations

في البندين (٣ , ١)، (٣ , ٢)، بينّا أن للطور ، في حال الأمواج المنتقلة Travelling Waves، سرعة ينتقل بها من نقطة مكانية إلى أخرى وتساوي $\left(\frac{\omega}{k}\right)$. كما بينّا أن الكمية التي تظهر في معادلة الأمواج تساوي سرعة الطور هذه في حال الأمواج الجيبية . لكننا بينّا في البند (٣ , ٣) أن (u) لا تعني سرعة الطور في حال الأمواج الموقوفة ، وإن كانت مساوية للكمية $\left(\frac{\omega}{k}\right)$. فالطور لا يتحرك من نقطة مكانية إلى أخرى في حال الأمواج الموقوفة . وعلى أية حال ، فإن (u) ، بصورة عامة ، وحتى في حال الأمواج المنتقلة ، لا تساوي بالضرورة سرعة الطور . فهي كمية تعبر عن الخصائص القصورية Inertial والأخرى المرونية Elastic للوسط الذي تتحرك فيه الأمواج ، وإن كانت لها أبعاد السرعة .

وتسمى العلاقة :

$$\omega = u(M) \times k \qquad (3.125)$$

علاقة التشتت Dispersion Relation؛ حيث (M) تعني خصائص الوسط Medium .

بيد أن العلاقة (3.125) لا تنطبق إلا في حال كون الوتر (الوسط) الذي تتحرك فيه الأمواج وتراً مثالياً منتظم الكثافة والشد انتظاماً تاما . وفي هذه الحال ، يقال إن الأمواج لامشتتة Nondispersive.

أما في حال الأوساط المادية الواقعية ، فتكون علاقة التشتت (أي العلاقة بين التردد (ω)وبين الرقم الموجي (k)) أعقد من العلاقة (3.125) إلى هذا الحد أو ذاك ، اعتماداً

على مدى انحراف الوسط المعني عن الحالة المثالية. وتسمى الأمواج في هذه الحال الأمواج المشتتة Dispersive Waves. وعلى سبيل المثال، فإن وتر البيانو يحيد في العادة عن الوتر المثالي من حيث انتظام شدّه وكثافته. وأكثر علاقات التشتت ملاءمة له هي:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{u^2} + \alpha k^2 \qquad (3.126)$$

حيث(α)هو ثابت موجب يقترب من الصفر كلما اقترب الوتر من الحالة المثالية.

لذلك، ففي حال الأمواج الموقوفة في وتر البيانو، فإن الترددات لا تساوي مضاعفات صحيحة للتردد الأساسي، مع أن الأرقام الموجية (k) تساوي مضاعفات صحيحة للرقم الموجي الأساسي.

كذلك، فإن الأمواج الكهرَمغناطيسية المنتقلة في الأيونوسفير Ionosphere تطيع علاقة التشتت الآتية:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \qquad (\omega > \omega_p) \qquad (3.127)$$

حيث (ω_p) هي التردد الطبيعي للبلازما Plasma Natural Frequency،(c) هي سرعة الضوء في الفراغ.

ولعل المثال الأشهر على التشتت هو تجربة نيوتن الشهيرة التي استعمل فيها موشوراً Prism لتشتيت الضوء الأبيض إلى مكوناته من الألوان المختلفة. فانتقال طاقة الألوان بسرعة تعتمد على طول الموجة في الزجاج يدل على أن معدل تغير (ω) مع (k) ليس ثابتاً، بل يعتمد على (k)، ومن ثم لا يطيع العلاقة (3.125).

(٣, ٦) سرعة الرزمة Group Velocity

إذا أنعمنا النظر في طبيعة الأمواج الجيبية المنتقلة وحيدة التردد، تبيّن لدينا خواء هذه الأمواج من المعلومات، وذلك لرتابتها اللانهائية وخلوّها من التغيرات المتميزة. لذلك، لا تصلح هذه الأمواج في حد ذاتها لنقل المعلومات وإرسال الإشارات Signals المفيدة. فهذه الأخيرة تبث في العادة عن طريق النبضات الموجية Pulses، أو عن طريق إحداث تعديلات Modulations في متغيرات الأمواج الجيبية المنتقلة (الاتساع والتردد وثابت

الطور). وتتم هذه التعديلات في العادة ببث زمرة من الأمواج الجيبية المنتقلة التي تتباين متغيراتها الموجية عن بعضها، لكنها تكون متقاربة من بعضها بحيث يقع كل منها ضمن مدى صغير معين. والسؤال هو: كيف وبأي سرع تنتقل هذه الزمر؟ وما علاقة سرعة الزمرة Group Velocity مع السرعة التي تنتقل بها الطاقة الموجية؟

للإجابة عن هذين السؤالين، نتدبر زمرة بسيطة مكونة من موجتين جيبيتين منتقلتين فقط. ونفترض أن هاتين الموجتين متساويتا الاتساع لكن مختلفتا التردد وطول الموجة وثابت الطور. لكننا نفترض أن تردد الأولى وطول موجتها وثابت طورها لا تختلف إلا قليلاً عن تردد الأخرى وطول موجتها وثابت طورها. وبالطبع، فإننا نفترض أنهما تتحركان في الاتجاه ذاته (اتجاه تزايد (x) مثلا). بذلك تكون المحصلة (Ψ) كالآتي:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) + \Psi_1(x, t) \qquad (3.128)$$

$$\Psi(x, t) = A\left[\cos(\omega_0 t - k_0 x + \phi_0) + \cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1)\right] \qquad (3.129)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 - \omega_0 &= \delta\omega \\ k_1 - k_0 &= \delta k \\ \phi_1 - \phi_0 &= \delta\phi \end{aligned}\right] \qquad (3.130)$$

حيث تشير (δ) إلى تغير طفيف في المتغير المعني.

فإذا علمنا أن:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad (3.131)$$

فإن:

$$\Psi(x, t) = 2A\cos\left[\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x + \delta\phi\right] \times$$
$$\cos\left[\frac{\omega_0 + \omega_1}{2}t - \frac{k_1 + k_0}{2}x + \frac{\phi_1 + \phi_0}{2}\right] \qquad (3.132)$$

بيد أنه، بالنظر إلى العلاقة (3.130):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} &= \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2} \simeq \omega_0 \\ \frac{k_0 + k_1}{2} &= k_0 + \frac{\delta k}{2} \simeq k_0 \\ \frac{\phi_1 + \phi_0}{2} &= \phi_0 + \frac{\delta\phi}{2} \simeq \phi_0 \end{aligned}\right] \qquad (3.133)$$

بذلك تؤول المعادلة (3.132) إلى الشكل الآتي :

$$\Psi(x, t) = 2A \cos\left[\frac{\delta\omega}{2} t - \frac{\delta k}{2} x + \delta\phi\right] \cos\left[\omega_0 t - k_0 x + \phi_0\right] \qquad (3.134)$$

وتناظر المعادلة (3.134) معادلة الضربات Beats التي اشتققناها في نهاية الفصل الأول للحركات التوافقية البسيطة. والفرق بين الحالتين هو أن الضربات في حال (3.134) لا تتم في الزمان فحسب، بل تتم وتنتقل أيضا في المكان. ويلاحظ أن التغيير الذي يدخله اجتماع موجتين جيبيتين على بعضهما لا يمس الحدّ الذي يتضمن الطور، بل يمس الاتساع فقط. فالطور يبقى كما هو تقريباً. أما الاتساع فيطرأ عليه تغيّر موجي بطيء بالنسبة إلى تغير الطور. إذاً، لدينا في هذه الحال سرعتان؛ سرعة الطور وسرعة الاتساع (او ما يسمى في الادبيات الفيزيائية سرعة الزمرة Group Velocity). وتمثل هذه الأخيرة سرعة المغلف الموجي Wave Packet (Envelope) المتكون من اجتماع الموجتين.

وكما يتضح من المعادلة (3.134)، فإن سرعة الطور المستنبطة من الجتا اليمنى في المعادلة هي :

$$v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0} \qquad (3.135)$$

أما سرعة الزمرة المستنبطة من الجتا اليسرى في المعادلة (سرعة الضربات، إن شئت)، فهي :

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \simeq \frac{d\omega}{dk} \qquad (3.136)$$

وبالنظر إلى العلاقة الوثيقة بين الطاقة والاتساع (اعتماد الطاقة على مربع الاتساع)، والتي بيّناها في الفصل الأول للحركة التوافقية البسيطة، فإن الطاقة لا تتحرك بسرعة الطور بصورة عامة، بل إنها تتحرك بسرعة الزمرة.

ولنضرب مثلا على ذلك من نظرية دي برولي في الميكانيكا الموجية.

انطلاقا من نظرية بلانك الكنتمية، افترض دي برولي أن لكل جسيْم حركة دورية داخلية ذات تردد معين، وان الطاقة «الداخلية» للجسيْم من جراء هذه الحركة هي:

$$\varepsilon = \hbar\,\omega \qquad (3.137)$$

حيث (ε) هي الطاقة، $(\hbar)$ ثابت بلانك مقسوماً على (2π)، (ω_0) التردد الزاوي للحركة الداخلية.

ثم افترض أن هذه الطاقة الداخلية تساوي طاقة الكتلة (طاقة السكون) التي توصلت إلى مفهومها نظرية النسبية الخاصة.

أي:

$$\hbar\omega_0 = m_0c^2 \qquad (3.138)$$

حيث (m_0) كتلة السكون للجسيْم، (c) سرعة الضوء في الفراغ.

فإذا كان الجسيْم متحركاً بالسرعة (v)، أضحى التردد (ω):

$$\hbar\omega = mc^2 \qquad (3.139)$$

حيث (m) هي كتلة الجسيْم المتحرك.

ووفق نظرية النسبية الخاصة، فإن:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (3.140)$$

أي إن:

$$\omega = \frac{m_0c^2}{\hbar} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (3.141)$$

ومن تحليلاته هذه استوحى فكرة أن هناك موجة مصاحبة لكل جسيْم في حركته. وسمى هذه الأمواج أمواج المادة Matter Waves. واستنتج أن سرعة الطور لهذه الأمواج هي:

$$v_\phi = \frac{c^2}{v} \tag{3.142}$$

والسؤال هو: ما هي سرعة الزمرة لهذه الأمواج؟

بالنظر إلى المعادلة (3.135)، فإن:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v} \tag{3.143}$$

ومن ثم، فإن:

$$\frac{dk}{d\omega} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega v}{c^2}\right) \tag{3.144}$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{v}{c^2} + \frac{\omega}{c^2}\left(\frac{d\omega}{dv}\right)^{-1} \tag{3.145}$$

ومن المعادلة (3.141)، فإن:

$$\frac{d\omega}{dv} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\frac{m_0c^2}{\hbar}\;\frac{1}{(1- v^2/c^2)^{3/2}} \tag{3.146}$$

$$= \frac{m_0 v}{\hbar}\cdot\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \tag{3.147}$$

إذاً، فإن:

$$\frac{\omega}{c^2}\left(\frac{d\omega}{dv}\right)^{-1} = \frac{m_0c^2}{\hbar}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\hbar}{m_0 v}\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2} \tag{3.148}$$

$$= \frac{1}{v}\left(1- \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{v} - \frac{v}{c^2} \tag{3.149}$$

بذلك، تؤول المعادلة (3.145) إلى :

$$\left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} = \frac{1}{v} \tag{3.150}$$

أي:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \tag{3.151}$$

أي إن سرعة الزمرة لأمواج المادة مساوية لسرعة الجسيْم. وهكذا، فإن الطاقة (الجسيْم في هذه الحال) تنتقل بسرعة الزمرة، لا بسرعة الطور. وبهذا المعنى، فإن أمواج المادة ترشد الجسيْمات المادية في حركاتها، كما عبّر عنها دي برولي.

وفي ضوء المعادلة (3.142)، فإنه يلاحظ أن سرعة طور أمواج المادة تفوق دوماً سرعة الضوء في الفراغ، بالنظر إلى أن ($v < c$) وفق نظرية النسبية الخاصة. ولا ضير في ذلك ما دامت سرعة انتقال الطاقة لا تفوق سرعة الضوء. فنظرية النسبية الخاصة لا تضع حدوداً لسرعة أطوار الأمواج، بل تضع حدودا لانتقال الطاقة، ومن ثم لسرعة الزمرة.

ونجد وضعا مشابهاً في حال الأمواج الكهرَمغناطيسية المنتقلة في الأيونوسفير، والتي تطيع علاقة التشتت (3.127). ففي هذه الحال، فإن:

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \left(\frac{\omega_p}{k} \right)^2 + c^2 \tag{3.152}$$

من ثم، فإن:

$$v_\phi^2 = c^2 + \left(\frac{\omega_p}{k} \right)^2 \tag{3.153}$$

أي إن :

$$v_\phi = \sqrt{c^2 + \left(\frac{\omega_p}{k} \right)^2} \geq c \tag{3.154}$$

بمعنى أن سرعة الطور تفوق سرعة الضوء في الفراغ.

والآن، إذا فاضلنا المعادلة (3.127) بالنسبة إلى (k)، حصلنا على:

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c^2k \tag{3.155}$$

أي إن :

$$\left(\frac{\omega}{k} \right) \left(\frac{d\omega}{dk} \right) = c^2 \qquad (3.156)$$

أي :

$$v_\phi \, v_g = c^2 \qquad (3.157)$$

$$v_\phi = \frac{c^2}{v_g} \qquad (3.158)$$

وهي مماثلة لمعادلة دي برولي (3.143).

وفي ضوء العلاقة (3.154)، فإن المعادلة (3.157) تفيد بأن :

$$v_g \leq c \qquad (3.159)$$

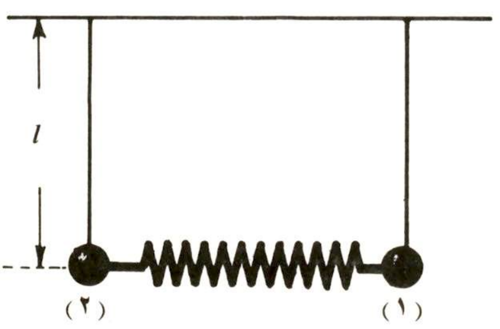
وهذا يؤكد ما ذهبنا إليه أعلاه بصدد علاقة انتقال الطاقة مع سرعة الزمرة .

الفصـــل الرابـــع

الأنماط الاهتزازية والأمواج في الأنظمة المادية

(٤ , ١) بندولان مترابطان

تدبر بندولين مماثلين لبعضهما من حيث كتلة الثقل المعلق ومن حيث طول الخيط ، وتصل بينهما في حال الاتزان مسافة تساوي الطول الطبيعي لزنبرك يصل بين الثقلين المعلقين ، كما هو مبين في الشكل (٤ , ١) .



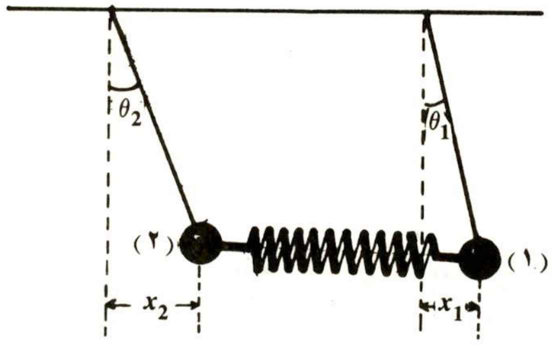
الشكل (٤ , ١) - بندولان مترابطان

ولنشر إلى إزاحة الثقل الأول من موضع الاتزان بالرمز (x_1) ، وإلى إزاحة الثقل الثاني بالرمز (x_2) ، كما هو مبين في الشكل (٤ , ٢) .

ولنتدبر أولا القوى المؤثرة على الثقلين في حال انعدام الزنبرك .

في هذه الحال ، تكون القوة المرجعة للثقل الأول كالآتي :

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\,\theta_1 \qquad (4.1)$$



الشكل (٢ , ٤) - إزاحتا البندولين

وذلك كما بيّنا في الفصل الثاني.

بيد أن :

$$\theta_1 = \frac{x_1}{l} \qquad (4.2)$$

في حال الإزاحات الصغيرة.

وعليه، فإن :

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}x_1 \qquad (4.3)$$

أو :

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}x_1 \qquad (4.4)$$

حيث إن (m) هي كتلة أي من الثقلين.

وبالمثل، فإن القوة المرجعة المؤثرة على الثقل الثاني هي :

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}x_2 \qquad (4.5)$$

أما القوى المؤثرة في حال وجود الزنبرك، لكن مع انعدام الخيطين، أي في حال وجود الثقلين المرتبطين بالزنبرك على سطح مستوٍ تام الملوسة، فهي :

$$F_1 = -s(x_1 - x_2) \qquad (4.6)$$

حيث (F_1) هي القوة المرجعة المؤثرة على الثقل الأول، (s) هي ثابت الزنبرك؛ وكذلك:

$$F_2 = s\,(x_1 - x_2) \tag{4.7}$$

بذلك، فإن القوة المرجعة الكلية على كل من الثقلين في حال وجود الخيط والزنبرك في آن واحد هي:

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}\,x_1 - s\,(x_1 - x_2) \tag{4.8}$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}\,x_2 + s\,(x_1 - x_2) \tag{4.9}$$

وهما معادلتان مترابطتان على غرار المعادلتين (3.86)، (3.87). ويمكن حلهما على غرار ما فعلناه مع المعادلتين المذكورتين. لكننا، عوضا عن ذلك، سنلجأ إلى محاولة تخمين الإحداثيات العادية Normal Coordinates لنظام البندولين من بنية المعادلتين (4.8)، (4.9).

علامَ نحصل إذا جمعنا المعادلتين (4.8)، (4.9) معا؟

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}\,(x_1 + x_2) = -\frac{mg}{l}\,(x_1 + x_2) \tag{4.10}$$

فإذا كانت:

$$q_1 = x_1 + x_2 \tag{4.11}$$

حصلنا على:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{g}{l}\,q_1 \tag{4.12}$$

وإذا طرحنا المعادلة (4.9) من المعادلة (4.8)، حصلنا على:

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}\,(x_1 - x_2) = -\frac{mg}{l}\,(x_1 - x_2) - 2s\,(x_1 - x_2) \tag{4.13}$$

أي :

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -\left(\frac{mg}{l} + 2s \right) (x_1 - x_2) \qquad (4.14)$$

فإذا كانت :

$$q_2 = x_1 - x_2 \qquad (4.15)$$

فإن :

$$\ddot{q}_2 = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2s}{m} \right) q_2 \qquad (4.16)$$

وهكذا، وبهذه الطريقة، أفلحنا في اختزال المعادلتين (4.8)، (4.9) إلى معادلتين لحركتين توافقيتين بسيطتين مستقلتين عن بعضهما، أعني (4.12)، (4.16). وبتعبير آخر، فقد أفلحنا في إيجاد معادلتي الإحداثيين العاديين لنظام البندولين.

ويتضح من المعادلتين (4.12)، (4.16) أن الترددين الطبيعيين لنظام البندولين هما :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (4.17)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2s}{m}} \qquad (4.18)$$

ويلاحظ ان (ω_1) مماثلة لتردد بندول مستقل، فهي لا تعتمد مطلقاً على ثابت الزنبرك.

لماذا وكيف؟

كما أسلفنا، فإن كل نمط اهتزازي مستقل عن الآخر. وبتعبير آخر، فإن كل إحداثي عادي مستقل في حركته عن الآخر. فمع أن الطاقة يتم تبادلها بين الأجزاء المتحركة، إلا أنه لا يتم تبادلها بين الأنماط الاهتزازية أو بين الإحداثيات العادية. وبصورة عامة، فإن الازاحة هي مزيج خطي من الإحداثيات العادية. بيْد أنها يمكن أن تكون في هذا النمط أو ذاك وحده. ولنفترض أولا أنها في النمط الممثل بالإحداثي العادي (q). في هذه الحال، فإن :

$$q_2 = 0 \tag{4.19}$$

وبالنظر إلى المعادلة (4.15)، فإن :

$$x_1 = x_2 \tag{4.20}$$
$$F_1 = F_2 = 0 \tag{4.21}$$

ومعنى ذلك أن الزنبرك لا يؤثر بأي قوة على أي من الثقلين، حيث إن طوله (المسافة بين الثقلين) يظلّ ثابتاً ومساوياً لطوله الطبيعي. فوفق (4.20)، فإن أي تغير في (x_1) يعادله تغير مماثل في (x_2)، والعكس بالعكس. وهكذا، فإن النمط الاهتزازي الممثل بالإحداثي العادي (q_1) يناظر الحالة التي يتحرك فيها الثقلان المعلقان بالتواكب In Phase.

أما إذا كان نظام البندولين يتحرك بالنمط الاهتزازي الممثل بالإحداثي العادي (q_2)، فإن :

$$q_1 = 0 \tag{4.22}$$

وبالنظر إلى المعادلة (4.11)، فإن :

$$x_1 = -x_2 \tag{4.23}$$

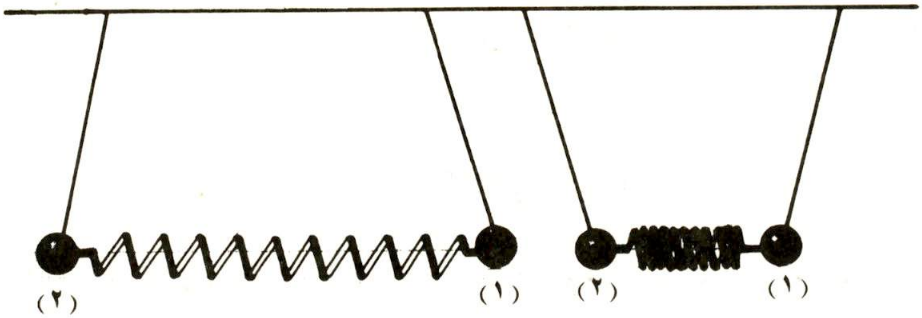
وتكون كل من $(|F_1|)$، $(|F_2|)$ في هذه الحال عند حدّها الأقصى.

وهذا يعني أنه عندما يكون الثقل الأول في أقصى اليمين المتاح له، فإن الثقل الثاني يكون في أقصى اليسار المتاح له، والعكس بالعكس، كما هو مبين في الشكل (٤, ٣).

بذلك، فإن النمط الاهتزازي الممثل بالإحداثي العادي (q_2) يناظر الحالة التي يتحرك فيها الثقلان باللاتواكب الكلي Out of Phase.

والآن، من المعادلتين (4.12)، (4.16)، فإن :

$$q_1 = q_{10} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{4.24}$$
$$q_2 = q_{20} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{4.25}$$



الشكل (٣ , ٤) - النمط الاهتزازي ذو التردد الأعلى

وبالنظر إلى المعادلتين (4.11)، (4.15)، فإن :

$$x_1 = \frac{1}{2} [q_{10} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + q_{20} \cos(\omega_2 t + \phi_2)] \quad (4.26)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} [q_{10} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - q_{20} \cos(\omega_2 + \phi_2)] \quad (4.27)$$

وإننا نختار الشروط الابتدائية في الإزاحتين وسرعتيهما بحيث :

$$q_{10} = q_{20} = A \quad (4.28)$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (4.29)$$

بذلك، فإن :

$$x_1 = A [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] \quad (4.30)$$

$$x_2 = A [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t] \quad (4.31)$$

ولما كانت :

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{y - x}{2} \cos \frac{y + x}{2} \quad (4.32)$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y - x}{2} \sin \frac{y + x}{2} \quad (4.33)$$

فإن :

$$x_1 = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \qquad (4.34)$$

$$x_2 = 2A \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \qquad (4.35)$$

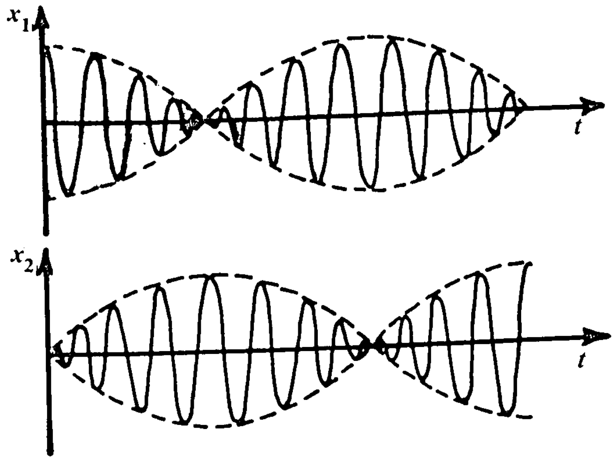
واذا كانت $\left(\frac{s}{m}\right)$ صغيرة بالنسبة إلى (ω_2)، كان الفرق بين (ω_1)، (ω_2) صغيراً، ومن ثم حصلنا على ضربات Beats. فالإحداثيان العاديان إذاً يجتمعان في هذه الحال لإحداث ضربات في الإزاحتين.

ولكن، كيف تتمظهر هذه الضربات؟

لنفترض أننا أمسكنا بالثقل الأول وأزحناه مسافة $(2A)$ وأبقينا الثقل الثاني عند موضع الاتزان، ثم أفلتنا الثقلين معا عند $(t=0)$. ماذا يحصل وفق المعادلتين (4.34)، (4.35)؟

الذي يحصل هو أن إزاحة الثقل الأول تتناقص، فيما تتزايد إزاحة الثقل الثاني، حتى يتوقف الثقل الأول لحظياً. عند ذاك، تكون إزاحة الثقل الثاني $(2A)$ ويكون يتحرك بالطاقة التي ابتدأ بها الثقل الأول. ومعنى ذلك أن طاقة الثقل الأول انتقلت في تلك الأثناء كلياً إلى الثقل الثاني. بعد ذاك، تتناقص إزاحة الثقل الثاني، فيما تتزايد إزاحة الثقل الأول حتى تنتقل الطاقة كلياً إلى الثقل الأول، وهلمّ جرّا. وهكذا تظلّ الطاقة تنتقل من بندول إلى الآخر. وتعد كل دورة تنتقل فيها الطاقة من البندول الأول إلى الثاني وتعود فيها من الثاني إلى الأول – تعد ضربة Beat. والنقطة المهمة هنا هي أن فرق الطور بين الإزاحتين هو $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ دوما، كما يبيّن الشكل (٤ , ٤).

ولنتدبر طاقة كل من البندولين، مفترضين أن الطاقة المتبادلة بين كل من البندولين وبين الزنبرك مهملة لكون $\left(\frac{s}{m}\right)$ صغيرة بالنسبة الى (ω_1). وهذا يعني أن $(\omega_2 - \omega_1)$ صغيرة بالنسبة الى (ω_1)، ومن ثم ان الدالتين $\left[2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right]$، $\left[2A \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right]$ تتغيران ببطء كبير بالنسبة إلى الدالتين $\left[\cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}\right]$، $\left[\sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}\right]$.



الشكل (٤ , ٤) – الضربات في الإزاحتين

والآن نعبّر عن هذه الكميات بالآتي :

$$\omega_2 - \omega_1 = \triangle\omega \qquad (4.36)$$

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \omega_{av} \qquad (4.37)$$

$$X_1(t) = 2A\cos\frac{\triangle\omega}{2}t \qquad (4.38)$$

$$X_2(t) = 2A\sin\frac{\triangle\omega}{2}t \qquad (4.39)$$

حيث $(\triangle\omega)$ هي تردد الضربات؛ (ω_{av}) هي معدل Average ترددي النمطين الاهتزازيين؛ $\left(X_1(t)\right)$ ، $\left(X_2(t)\right)$ هما اتساعا الإزاحتين اللذان يتسمان ببطء التغير مع الزمن.

بذلك تؤول المعادلتان (4.34)، (4.35) إلى الشكل الآتي :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1(t)\cos\omega_{av}t \\ x_2 &= X_2(t)\sin\omega_{av}t \end{aligned}\right] \qquad (4.40)$$

ولنتدبر طاقة البندول الأول .

إذا كانت طاقة حركته هي (E_{K1}) ، فإن :

$$E_{K1} = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2$$

ومن المعادلة (4.40)، فإن :

$$\dot{x}_1 = \dot{X}_1(t) \cos \omega_{av}t - \omega_{av} X_1(t) \sin \omega_{av}t \qquad (4.41)$$

إذاً :

$$E_{K1} = \frac{1}{2} m \dot{X}_1^2 \cos^2 \omega_{av}t - \frac{\omega_{av} \dot{X}_1 X_1}{m} \sin \omega_{av} t \cos \omega_{av}t$$

$$+ \frac{1}{2} m\omega_{av}^2 X_1^2 \sin^2 \omega_{av}t \qquad (4.42)$$

والآن ، فلنأخذ معدل الطاقة عبر دورة كاملة لذبذبة الطور السريعة . أي :

$$\overline{E}_{K1} = \frac{1}{T_{av}} \int_0^{T_{av}} E_{K1}\, dt \qquad (4.43)$$

حيث :

$$\omega_{av} = \frac{2\pi}{T_{av}} \qquad (4.44)$$

بالنظر إلى ما قلناه أعلاه من أن (X_1) تتغير ببطء مع الزمن، فإنه يمكن اعتبار $(X_1(t))$ ،$(\dot{X}_1(t))$ ثابتتين في أثناء دورة كاملة لذبذبة الطور السريعة .

وعليه ، فإن :

$$\overline{E}_{K1} = \frac{1}{2} m\dot{X}_1 \overline{\cos^2 \omega_{av}t} - \frac{\omega_{av} \dot{X}_1 X_1}{m} \overline{\sin \omega_{av}t \cos \omega_{av}t}$$

$$+ \frac{1}{2} m\omega_{av}^2 X_1^2 \overline{\sin^2 \omega_{av}t} \qquad (4.45)$$

ومن المعلوم أن :

$$\overline{cos^2\omega_{av}t} = \overline{sin^2\omega_{av}t} = \frac{1}{2} \qquad (4.46)$$

$$\overline{sin\ \omega_{av}t\ cos\ \omega_{av}t} = 0 \qquad (4.47)$$

وإذا أهملنا $(\dot{X}_1)$ على اعتبار أن $(X(t))$ تتصرف وكأنها ثابت في أثناء الفترة الدورية (T_{av})، فإن :

$$\bar{E}_{K1} = \frac{1}{4} m\omega_{av}^2 X_1^2 \qquad (4.48)$$

أما الطاقة الوضع (E_{p1}) ، فهي :

$$E_{p1} = \frac{1}{2} m\omega_{av}^2 x_1^2 \qquad (4.49)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega_{av}^2 X_1^2 \cos^2 \omega_{av} t \qquad (4.50)$$

بذلك ، فإن :

$$\bar{E}_{p1} = \frac{1}{2} m\omega_{av}^2 X_1^2 \overline{cos^2\omega_{av}t} \qquad (4.51)$$

$$= \frac{1}{4} m\omega_{av}^2 X_1^2 \qquad (4.52)$$

وعليه ، فإن معدل الطاقة الكلية للبندول الأول $(\bar{E}_1)$ تساوي :

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{2} m\omega_{av}^2 X_1^2 \qquad (4.53)$$

$$= 2mA\omega_{av}^2 cos^2 \frac{\triangle\omega}{2} t \qquad (4.54)$$

وبالمثل ، فإن معدل الطاقة الكلية للبندول الثاني $(\bar{E}_2)$ تساوي :

$$\bar{E}_2 = 2mA\omega_{av}^2 sin^2 \frac{\triangle\omega}{2} t \qquad (4.55)$$

من ذلك يتضح أن معدل الطاقة الكلية للنظام ($\bar{E}$) ثابت . إذ إن :

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = 2mA^2\omega_{av}^2 \tag{4.56}$$

ومن جهة أخرى ، فإن :

$$\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = 2mA^2\omega_{av}^2 \left(\cos^2 \frac{\triangle\omega}{2} t - \sin^2 \frac{\triangle\omega}{2} t\right) \tag{4.57}$$

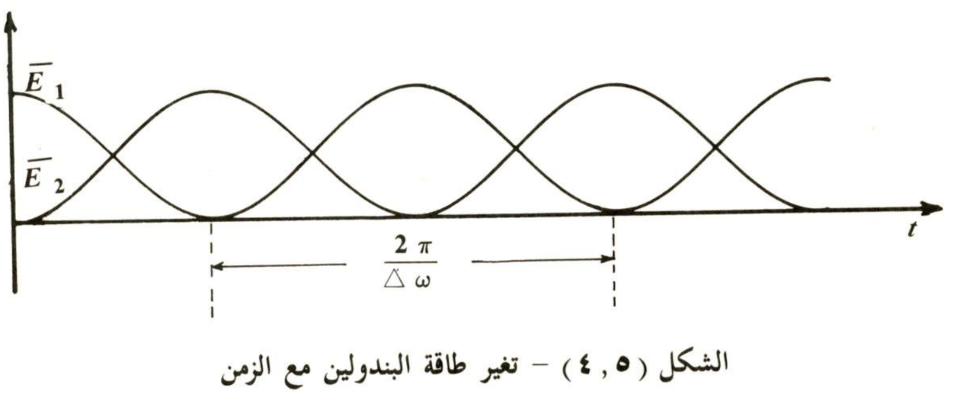
$$= \bar{E} \cos \triangle\omega t \tag{4.58}$$

ومن المعادلتين (4.56)، (4.58)، يتضح أن :

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{2} \bar{E} (1 + \cos \triangle\omega t) \tag{4.59}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{2} \bar{E} (1 - \cos \triangle\omega t) \tag{4.60}$$

ويبين الشكل (٤ , ٥) تغير ($\bar{E}_1$) ، ($\bar{E}_2$) مع الزمن .



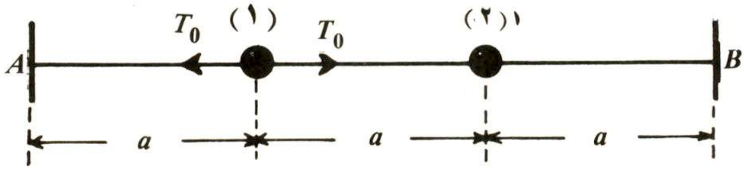
الشكل (٤ , ٥) - تغير طاقة البندولين مع الزمن

ويبين الشكل (٤ , ٥) كيف تنتقل الطاقة من بندول إلى آخر بصورة دورية وبتردد يساوي ($\triangle\omega$) ، وهو تردد الضربات .

(٤ , ٢) الحركة المستعرضة لكتلتين مترابطتين

تدبر كتلتين يصل بينهما وتر مهمل الكثافة . ولنفترض أن كل كتلة بدورها موصولة

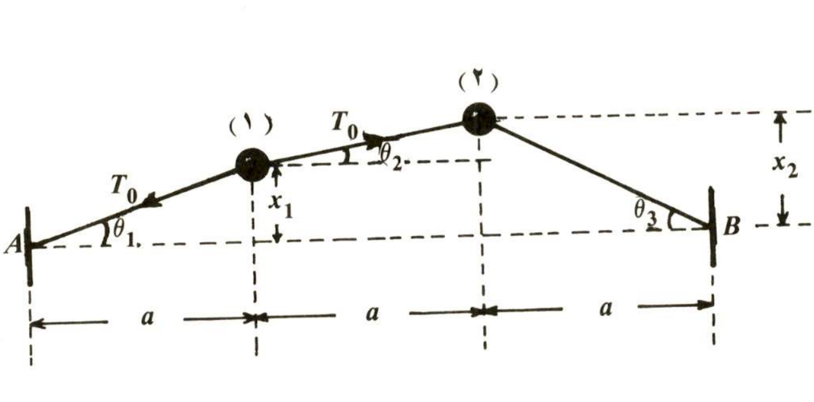
مع نقطة ثابتة بوتر مساوٍ في الطول للوتر الواصل بين الكتلتين، كما هو مبين في الشكل (٦ , ٤).



الشكل (٦ , ٤) – وضع الاتزان لكتلتين مترابطتين

ولنسمح للكتلتين بالتحرك بإزاحات مستعرضة [عمودية على الخط (AB) في الشكل (٦ , ٤)] مقصورة على السطح المستوي لهذه الصفحة. ولنفترض بأن هذه الإزاحات صغيرة إلى حد أن التوتر في الأوتار الثلاثة (T_0) لا يتغير بصورة معتبرة بفعل الإزاحة المتغيرة للكتلتين.

ولنتدبر النظام بعد مضي الفترة (t) على بدء الحركة، اعتمادا على الشكل (٧ , ٤). ولتكن إزاحة الجسم الأول $x_1(t)$ ، وإزاحة الثاني $x_2(t)$. ولنرمز إلى أطوال الأوتار عند هاتين الإزاحتين بالرموز: $\left(l_1(t)\right)$، $\left(l_2(t)\right)$ ، $\left(l_3(t)\right)$ ابتداء من النقطة (A) في الشكل (٧ , ٤).



الشكل (٧ , ٤) – النظام بعد بدء الحركة

ويتضح من الشكل (٤ , ٧) أن المركبة العمودية للقوة المؤثرة على الكتلة الأولى بفعل شد الوتر الأول (الأيسر) هي :

$$f_{11} = - T_0 \sin \theta \qquad (4.61)$$

$$= - T_0 \frac{x_1}{l_1} \qquad (4.62)$$

ولكن، لما كانت :

$$x_1 \ll a \qquad (4.63)$$

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{(a^2 + x_1^2)^{1/2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2}} \qquad (4.64)$$

$$= \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{a^2} + \cdots\right) \qquad (4.65)$$

فإن :

$$\frac{1}{l_1} \simeq \frac{1}{a} \qquad (4.66)$$

وعليه، فإن :

$$f_{11} = - T_0 \frac{x_1}{a} \qquad (4.67)$$

كذلك، فإن المركبة العمودية للقوة المؤثرة على الكتلة الأولى بفعل شد الوتر الثاني الواقع بين الكتلتين هي :

$$f_{12} = + T_0 \sin \theta_2 \qquad (4.68)$$

$$= \frac{T_0}{l_2} (x_2 - x_1) \qquad (4.69)$$

$$\simeq \frac{T_0}{a} (x_2 - x_1) \qquad (4.70)$$

وعليه، فإن محصلة القوتين العموديتين المؤثرتين على الكتلة الأولى تساوي :

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{T_0}{a}x_1 + \frac{T_0}{a}(x_2 - x_1) \tag{4.71}$$

أو :

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2T_0}{ma}x_1 + \frac{T_0}{ma}x_2 \tag{4.72}$$

وبالمثل، فإن محصلة القوتين العموديتين المؤثرتين على الكتلة الثانية هي :

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{T_0}{a}(x_2 - x_1) - T_0\frac{x_2}{a} \tag{4.73}$$

أي :

$$\ddot{x}_2 = +\frac{T_0}{ma}x_1 - \frac{2T_0}{ma}x_2 \tag{4.74}$$

كيف نخمن الإحداثيين العاديين لهذا النظام ؟

إذا جمعنا المعادلتين (4.72)، (4.74) حصلنا على :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = -\frac{T_0}{ma}(x_1 + x_2) \tag{4.75}$$

أما إذا طرحنا الواحدة من الأخرى، فإننا نحصل على :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -3\frac{T_0}{ma}(x_1 - x_2) \tag{4.76}$$

وهكذا، فإن الإحداثيين العاديين هما :

$$X_1 = x_1 + x_2 \tag{4.77}$$

$$X_2 = x_1 - x_2 \tag{4.78}$$

حيث :

$$\ddot{X}_1 = -\frac{T_0}{ma}X_1 \tag{4.79}$$

$$\ddot{X}_2 = -3\frac{T_0}{ma}X_2 \tag{4.80}$$

ومن الواضح أن الترددين الطبيعيين للنظام هما :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T_0}{ma}} \tag{4.81}$$

$$\omega_2 = \sqrt{3\frac{T_0}{ma}} = \sqrt{3}\,\omega_1 \tag{4.82}$$

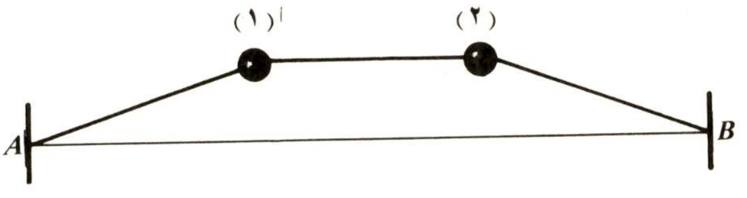
وإذا كان النظام في النمط الاهتزازي الأول وحده ، فإن :

$$X_2 = x_1 - x_2 = 0 \tag{4.83}$$

أي إن :

$$x_1 = x_2 \tag{4.84}$$

ويمثل الشكل (٨ , ٤) هذا الوضع .



الشكل (٨ , ٤) - النمط الاهتزازي الاول

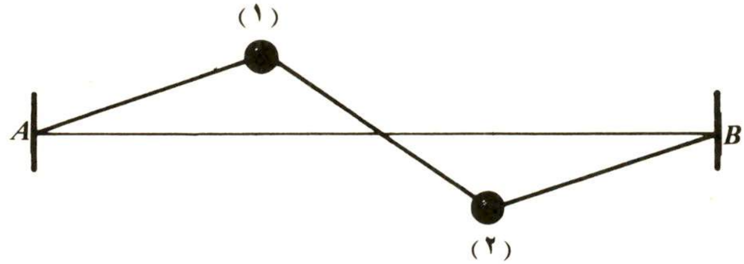
وإذا كان النظام في النمط الاهتزازي الثاني وحده ، فإن :

$$X_1 = 0 \tag{4.85}$$

أي :

$$x_1 = -x_2 \tag{4.86}$$

وهذا الوضع ممثل بالشكل (٩ , ٤) .



الشكل (٤ , ٩) - النمط الاهتزازي الثاني

وكما أسلفنا، فإن الازاحتين بصورة عامة هما مزيجان من هذين النمطين الاهتزازيين. والحق أن هذين النمطين يذكراننا بالأنماط الاهتزازية للأمواج الموقوفة.

(٤ , ٣) الحركة المستعرضة لمجموعة مترابطة من الكتل

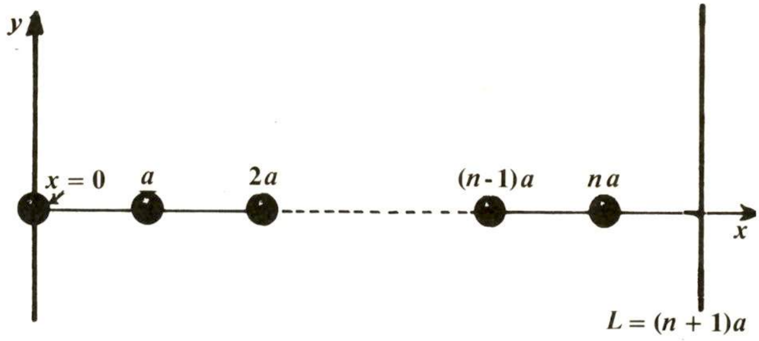
تدبر (n) من الكتل المماثلة لبعضها والمرتبطة مع بعضها بعدد من الأوتار المتساوية الأطوال والمهملة الكتل. ولنفترض أن هذه السلسلة من الكتل والأوتار مشدودة وممتدة عبر الإحداثي الافقي (x) بين النقطتين الثابتتين $(x = 0)$ ، $(x = L)$ ، وأن طول الوتر في حالي الاتزان (السكون) هو (a). في هذه الحال، فإن:

$$L = (n + 1)\, a \tag{4.87}$$

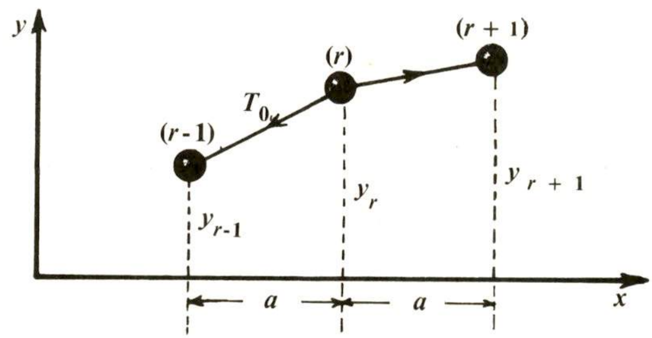
ونفترض أن حركة الكتل مقصورة على السطح المستوي لهذه الصفحة وفي الاتجاه العمودي (y) وبإزاحات صغيرة بالنسبة إلى (a)؛ بمعنى أنها اهتزازات وذبذبات مستعرضة Transverse [انظر الشكل (٤ , ١٠)].

ولنتدبر حركة الكتلة رقم (r) وإزاحتها، بالإضافة إلى إزاحتي جارتيها (على يمينها وعلى يسارها).

في هذه الحال، لدينا الوضع المبين في الشكل (٤ , ١١).



الشكل (٤ , ١٠) – مجموعة مترابطة من الكتل



الشكل (٤ ، ١١) – حركة الكتلة رقم (r)

يتضح من الشكل ان المركبة العمودية للقوة المؤثرة على الكتلة (r) بفعل شد الوتر الواقع بين $(r-1)$، (r) هي $[-\dfrac{T_0}{a}(y_r - y_{r-1})]$، وأن تلك الناشئة عن شد الوتر الواقع بين (r)، $(r+1)$ هي $[+\dfrac{T_0}{a}(y_{r+1} - y_r)]$.

بذلك، فإن محصلة القوتين المؤثرتين على الكتلة (r) هي :

$$m\ddot{y}_r = -\frac{T_0}{a}(y_r - y_{r-1}) + \frac{T_0}{a}(y_{r+1} - y_r) \qquad (4.88)$$

$$= \frac{T_0}{a}y_{r-1} - 2\frac{T_0}{a}y_r + \frac{T_0}{a}y_{r+1} \qquad (4.89)$$

وبالنظر إلى معالجتنا السابقة للأمواج الموقوفة ولنظرية الأنماط الاهتزازية، فإننا نفترض الحل الآتي للمعادلة (4.89):

$$y_r = A_r \cos(\omega t + \phi) \qquad (4.90)$$

وفي هذه الحال، تؤول المعادلة (4.89) إلى الشكل الآتي:

$$-m\omega^2 A_r = \frac{T_0}{a} A_{r-1} - \frac{2T_0}{a} A_r + \frac{T_0}{a} A_{r-1} \qquad (4.91)$$

أي:

$$A_{r+1} + A_{r-1} = A_r \left[2 - \frac{ma}{T_0}\omega^2\right] \qquad (4.92)$$

وحتى نتمكن من تخمين حل المعادلة (4.92)، فلنستطلع الشكل الذي تؤول إليه المعادلة (4.88) عند حدّ الاتصالية.

نتدبر عدداً لانهائيا من السلاسل المتساوية من حيث الكتلة الكلية والطول الكلي، لكن المختلفة من حيث عدد الكتل والأوتار المكونة لها. ومعنى ذلك أن الكتلة الكلية للسلسلة (M) والطول الكلي (L) ثابتان، في حين ان كتلة الجزء الواحد (m) وطول الوتر الواحد (a) متغيران من سلسلة إلى أخرى. أما حد الاتصالية، فهو الحد الذي يقترب منه النظام إذْ تقترب كل من (m) ، (a) من الصفر. وعند هذا الحد تغدو (y_r) دالة متصلة للمتغير المكاني (x) . فإذا كانت الكتلة رقم (r) عند النقطة (x) ، فإن:

$$\operatorname*{Lm}_{\substack{m \to 0 \\ a \to 0}} y_r(t) = y(x, t) \qquad (4.93)$$

ولنتدبر الكتلة الواقعة عند النقطة (x) في سلسلة تتضمن عدداً كبيراً، لكن محدوداً، من الأجزاء والأوتار.

في هذه الحال، فإن:

$$y_r \simeq y(x, t) \qquad (4.94)$$

$$y_{r\pm 1}(t) \simeq y(x \pm a, t) \qquad (4.95)$$

وعند حد الاتصالية تؤول علامة التساوي التقريبي ($\simeq$) إلى علامة التساوي (=) .

وعليه ، تؤول المعادلة (4.88) إلى الشكل الآتي :

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \simeq -\frac{T_0}{a}[y(x,t) - y(x-a,t)]$$

$$+ \frac{T_0}{a}[y(x+a,t) - y(x,t)] \qquad (4.96)$$

ونكتب $\big(y(x \pm a)\big)$ على شكل متتالية تيلر كالآتي :

$$y(x \pm a, t) = y(x,t) \pm a \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + O(\pm a^3)$$
$$(4.97)$$

حيث تمثل $\big(O(\pm a^3)\big)$ الحدود في (a^3) فما فوق .

وعليه ، فإن :

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \simeq T_0 a \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + O'(a^3) \qquad (4.98)$$

أو

$$\frac{m}{a} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \simeq T_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + O'(a^2) \qquad (4.99)$$

نأخذ الآن حد الاتصالية :

$$\left[\underset{\substack{m \to 0 \\ a \to 0}}{\mathrm{Lm}} \left(\frac{m}{a}\right)\right] \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \underset{\substack{m \to 0 \\ a \to 0}}{\mathrm{Lm}} O'(a^2)$$
$$(4.100)$$

بيد أن :

$$\underset{\substack{m \to 0 \\ a \to 0}}{\mathrm{Lm}} \frac{m}{a} = \frac{dm}{dx} = \varrho \qquad (4.101)$$

حيث (α) هي الكثافة الطولية للوتر الكلي.

$$\lim_{\substack{m \to 0 \\ a \to 0}} O'(a^2) = 0 \qquad (4.102)$$

وعليه، فإن:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\varrho}{T_0} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.103)$$

وهي معادلة الأمواج، إذا اعتبرنا:

$$u = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho}} \qquad (4.104)$$

وهذا يؤكد أن حركة النظام المعني هي الشكل غير المتصل Discontinuous للأمواج الموقوفة. وبالنظر إلى هذه العلاقة الوثيقة بين الحركتين، فإنه من الطبيعي ان نفترض حلا للمعادلة (4.92) من صنف دالة الأمواج الموقوفة التي توصلنا إليها في الفصل السابق.

وعلى هذا الأساس، ولما كانت دالة النمط الاهتزازي للأمواج الموقوفة هي:

$$\Psi (x, t) = \sin kx \cos (\omega t + \phi) \qquad (4.105)$$

فإننا نتوقع أن يكون حل المعادلة (4.92) كالآتي:

$$A_r = A \sin kra \qquad (4.106)$$

حيث إن:

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ r \to \infty}} ra = x \qquad (4.107)$$

وفي ضوء المعادلة (4.106)، فإن:

$$A_{r+1} = A \sin (kra + ka) \qquad (4.108)$$

$$A_{r+1} = A\,[\sin kra \cos ka + \cos kra \sin ka] \qquad (4.109)$$

كذلك ، فإن :

$$A_{r-1} = A\,[\sin kra \cos ka - \cos kra \sin ka] \qquad (4.110)$$

وعليه ، فإن :

$$\begin{aligned} A_{r+1} + A_{r-1} &= 2\,A \sin kra \cos ka \\ &= 2\,A_r \cos ka \qquad (4.111) \end{aligned}$$

بذلك تؤول المعادلة (4.92) إلى :

$$\left.\begin{aligned} 2\,A_r \cos ka &= A_r\,[2 - \frac{ma}{T_0}\,\omega^2] \\ \omega^2 &= \frac{2T_0}{ma}\,(1 - \cos ka) \end{aligned}\right] \qquad (4.112)$$

بيد أن :

$$1 - \cos ka = 2 \sin^2 \frac{ka}{2} \qquad (4.113)$$

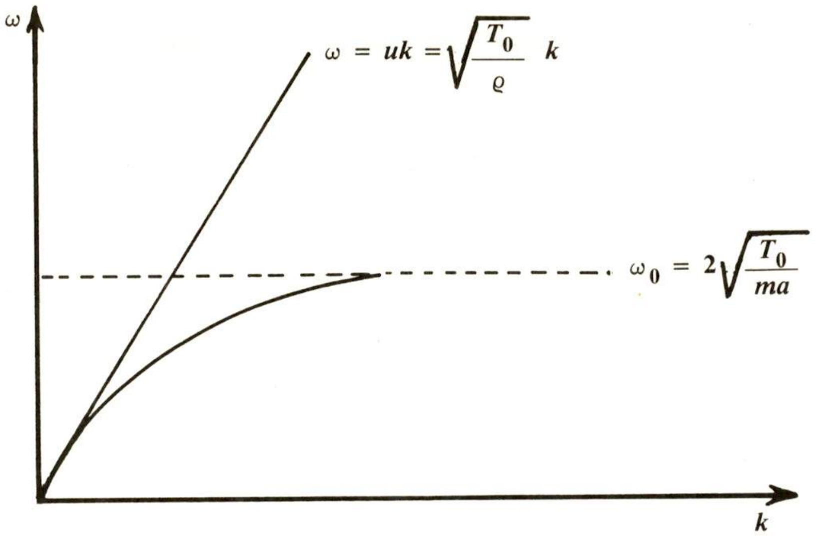
أي :

$$\omega^2 = \frac{4\,T_0}{ma} \sin^2 \frac{ka}{2} \qquad (4.114)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4T_0}{ma}} \sin \frac{ka}{2} \qquad (4.115)$$

وتعد المعادلة (4.114) علاقة التشتت للنظام . وهي اعقد بكثير من علاقة التشتت للأمواج الجيبية (المنتقلة والأخرى الموقوفة) . ويبين الشكل (٤ , ١٢) المنحنى الممثل لكل من العلاقتين .

وبالنظر إلى ما بيّناه أعلاه من أن معادلة سلسلة الكتل والأوتار تقترب من معادلة الأمواج عند حد الاتصالية ، فإننا نتوقع المعادلة (4.115) أن تقترب من علاقة التشتت للأمواج الجيبية عند هذا الحد .



الشكل (١٢ , ٤) – علاقة التشتت لكل من النظام المعني والأمواج الجيبية

ذلك أن :

$$\sin \frac{ka}{2} = \frac{ka}{2} + 0(a^3) \qquad (4.116)$$

بذلك ، فإن :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{T_0}{ma}}\left[\frac{1}{2}\ ka + 0(a^3)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{T}_0}{m/a}}\ k + 0\left(a^2 \cdot \frac{1}{m/a}\right) \qquad (4.117)$$

وبالنظر إلى المعادلتين (4.101)، (4.104)، فإن :

$$\underset{\substack{m \to 0 \\ a \to 0}}{\mathrm{Lm}}\ \omega = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho}}\ k = uk \qquad (4.118)$$

حيث (ϱ) الكثافة الطولية للوتر المتصل .

وهي علاقة تشتت الأمواج الجيبية .

ولنعد إلى المعادلة (4.106)، والتي تتضمن حلاً للاتساع. ولنفرض على هذا الحل الشروط الحدودية Boundary Conditions المتمثلة في اعتبار النقطتين اللتين تصل بينهما السلسلة المشدودة ثابتتين. ومن الواضح أن الشرط الأول $(A = 0)$ متضمن في الحل. أما الشرط الثاني، فيتمثل في اعتبار الاتساع صفرا عند $(x = L)$، أي في اعتبار (A_{n+1}) صفراً:

$$A_{n+1} = A\, sink\,(n+1)\,a = A\, sinkL = 0 \qquad (4.119)$$

والحق أن هناك (n) حل للمعادلة (4.119)، تتمثل في الآتي:

$$k_1 L = \pi,\ k_2 L = 2\pi,\ \ldots\ldots,\ k_n L = \pi n \qquad (4.120)$$

أو:

$$\lambda_1 = 2L,\ \lambda_2 = L,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (4.121)$$

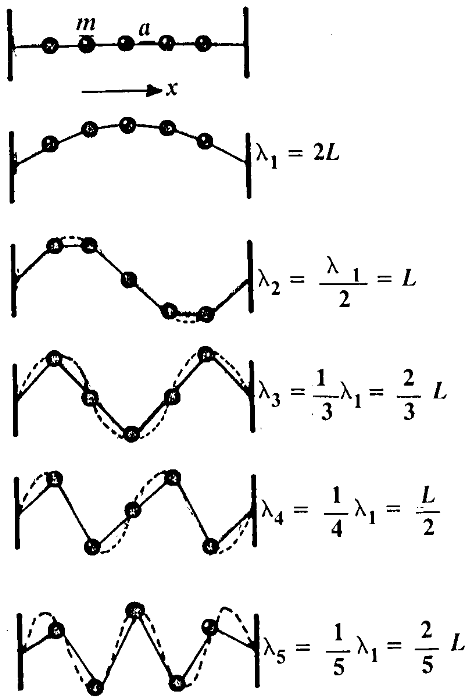
أي إن هناك (n) طول موجة ممكنة. ويعود السبب في ذلك إلى أن أصغر طول موجة ممكن في هذا النظام هو $\left(\lambda_n = \frac{2L}{n}\right)$، حيث إن العدد الكلي للأوتار هو $(n + 1)$. فلا سبيل إلى جعل طول الموجة أصغر إلا بزيادة عدد الكتل والأوتار في الحيز الطولي ذاته. ويمثل كل طول موجة من هذه الأطوال، ومن ثم كل تردد مناظر، نسقاًاهتزازياً للنظام.

وإذا تدبرنا نظاماً من هذا القبيل يتضمن خمس كتل، حصلنا على الأنساق الأهتزازية المبينة في الشكل (٤ , ١٣).

ويمثل الشكل (٤ , ١٣) صورة تقريبية للأمواج الموقوفة. فالأنماط المبينة في الشكل تذكرنا بأنماط الأمواج الموقوفة. والفرق الوحيد بين المجموعتين هو أن أنماط الشكل (٤ , ١٣) محدودة العدد، في حين أن أنماط الأمواج الموقوفة لانهائية العدد.

ونحصل على نتيجة مشابهة إذا تدبرنا اهتزازات طولية Longitudinal في نظام يضم مجموعة من الكتل تصل بينها مجموعة من الزنبركات المهملة الكتلة على امتداد طول معين، كما هو مبين في الشكل (٤ , ١٤). ونفترض أن الزنبركات مماثلة لبعضها من

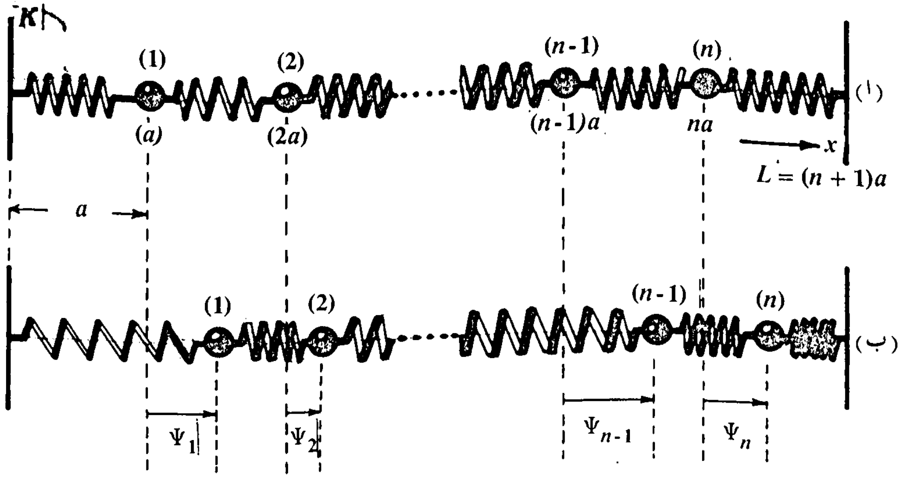
حيث الطول الطبيعي وثابت الزنبرك، أو الصلبية (K) Stiffness.



الشكل (٤,١٣) - نظام يتضمن خمس كتل

وعند وضع الاتزان [(أ) في الشكل (٤,١٤)] تكون أطوال الزنبركات جميعاً متساوية، ويكون طول كل زنبرك مساويا لـ (a). أما إذا أزيح النظام قليلاً من وضع الاتزان ([(ب) في الشكل (٤,١٤)]، تكتسب الكتلة (i) إزاحة صغيرة من موضع اتزانها تساوي $(\Psi_i\ (t))$. ويجدر الانتباه إلى أن الإزاحة وتغيرها مع الزمن (أي حركة الكتلة المعنية) يتمان في اتجاه (x)، أي في الاتجاه الأفقي. وهذا يعني أن الإزاحة تكون في اتجاه انتقال الطاقة. لذلك تسمى الاهتزازات في هذه الحال الاهتزازات الطولية

Longitudinal. أما في حال الاهتزازات المستعرضة Transverse، فتكون الإزاحة عمودية على خط انتقال الطاقة الاهتزازية.



الشكل (٤,١٤) - اهتزازات طولية في بعد واحد؛
يمثل الشكل (ا) حالة الاتزان، ويمثل
الشكل (ب) حالة من حالات اللااتزان

وإذا تدبرنا القوتين المؤثرتين على الكتلة (i)، على غرار ما فعلناه أعلاه مع الاهتزازات المستعرضة، حصلنا على:

$$m\,\ddot{\Psi}_i = K\,(\Psi_{i+1} - \Psi_i) - K\,(\Psi_i - \Psi_{i-1}) \qquad (4.122)$$

وهي مماثلة للمعادلة (4.88) من حيث الجوهر. فالفرق الوحيد بينهما هو أن ثابت الزنبرك أو الصلبية (K) يظهر في (4.122) محل الشد لكل وحدة طول $\left(\frac{T_0}{a}\right)$ في (4.88).

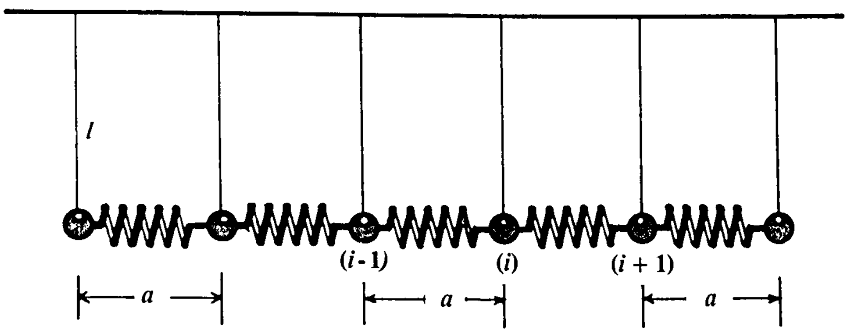
بذلك، فإننا نحصل في هذه الحال على الحلول والنتائج ذاتها التي توصلنا إليها في حال الاهتزازات المستعرضة. وبصورة خاصة، فإننا نحصل على علاقة التشتت الآتية [ارجع إلى المعادلة (4.115)]:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\ \sin\frac{ka}{2} \qquad (4.123)$$

كذلك، نحصل على الأنماط الاهتزازية ذاتها الممثلة بالمعادلتين (4.120) ، (4.121). كما نحصل على معادلة الأمواج عند حد الاتصالية، تماما كما هو الحال مع الاهتزازات المستعرضة، الأمر الذي يشير إلى أن الأمواج المستعرضة والأخرى الطولية تطيع معادلة الأمواج ذاتها.

(٤ , ٤) البندولات المترابطة ومعادلة كلاين – غوردن

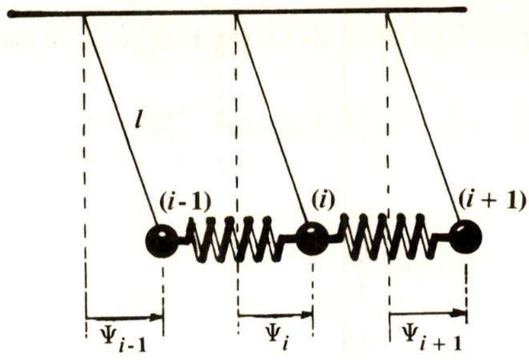
تدبر مجموعة من البندولات المتساوية الأطوال والكتل. ولنفترض أن المسافة ذاتها(a) تفصل بين أي بندولين متجاورين وأن زنبركاً مهمل الكتلة يصل بينهما، وذلك كما هو مبين في الشكل (٤ , ١٥).



الشكل (٤ , ١٥) – نظام البندولات المترابطة في وضع الاتزان

ولنتدبر البندول رقم (i) في علاقته مع البندولين اللذين يقع بينهما في الوضع العام (وضع اللااتزان)، كما هو مبين في الشكل (٤ , ١٦).

وبالنظر إلى ما جاء في البندين (٤ , ١)، (٤ , ٣)، فإن القوة الكلية المؤثرة على كتلة البندول رقم (i) هي:



الشكل (٤ , ١٦) - حركة البندول رقم (i)

$$m\,\ddot{\Psi}_i = -\frac{mg}{l}\,\Psi_i + K(\Psi_{i+1} - \Psi_i) - K(\Psi_i - \Psi_{i-1}) \qquad (4.124)$$

حيث (Ψ_i) هي إزاحة الكتلة رقم (i) من موضع الاتزان، (K) هي ثابت الزنبرك أو صلبيته Stiffness.

ويمكن حل المعادلة (4.124) على غرار ما فعلناه في البند (٤ , ٣) لنحصل على علاقة التشتت الآنية لنظام البندولات المترابطة:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{m}\sin^2\frac{ka}{2} \qquad (4.125)$$

ويلاحظ أن:

$$\omega^2 \geq \frac{g}{l} \qquad (4.126)$$

من ثم، فإن التردد الأدنى يساوي $\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$. وهو التردد عند $(k = 0)$، أي عندما يكون طول الموجة $\left(\lambda = \dfrac{2\pi}{k}\right)$ لانهائياً. وفي هذه الحال، فإن جميع البندولات تتذبذب بالكيفية ذاتها، أي بالاتساع والطور ذاتيهما، ومن ثم فإنها تتذبذب من دون أن تؤثر على الزنبركات أو تتاثر بها، وكأن الزنبركات غير موجودة في النظام، الأمر الذي ينعكس على التردد، حيث لا يعتمد في هذه الحال سوى على الجاذبية وخصائص وتر البندول، فلا يعتمد البتة على خصائص الزنبركات.

وإذا رمزنا إلى التردد الأدنى بالرمز (ω_0) ، آلت المعادلة (4.127) إلى الشكل الآتي :

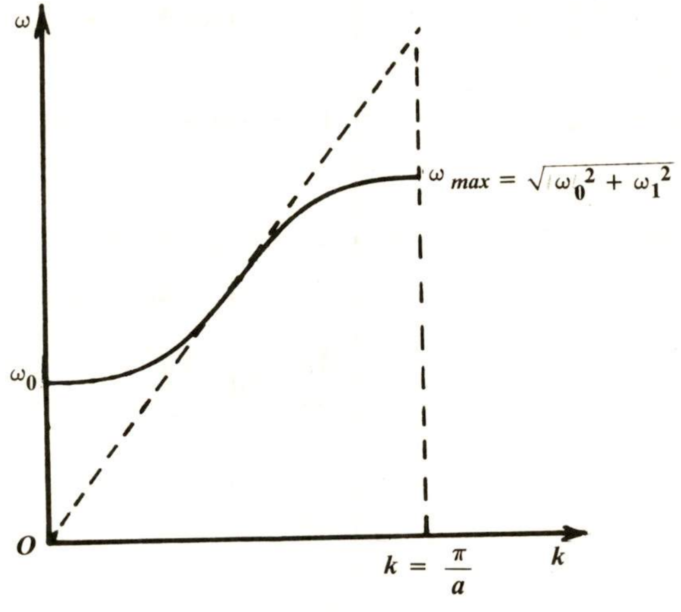
$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \qquad (4.127)$$

حيث :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad (4.128)$$

$$\omega_1^2 = \frac{4K}{m} \qquad (4.129)$$

ويمثل الشكل (٤ , ١٧) علاقة التشتت (4.127).



الشكل (٤ , ١٧) – علاقة التشتت لنظام البندولات

ويلاحظ أننا أوقفنا المنحنى عند ($k = \frac{\pi}{a}$) ، وذلك لأن أصغر طول موجة ممكنة في مثل هذا النظام هو ($\lambda = 2a$)، ومن ثم فإن ($\frac{\pi}{a}$) هي أكبر قيمة لـ (k).

ولنتدبر نظام البندولات عند حد الاتصالية، أي عند :

$$ka \ll 1 \qquad (4.130)$$

أي، عند:

$$a \ll \lambda \qquad (4.131)$$

في هذه الحال، فإن:

$$\sin \frac{ka}{2} \simeq \frac{ka}{2} \qquad (4.132)$$

من ثم تؤول المعادلة (4.127) إلى الشكل الآتي:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{\omega_1^2 a^2}{4} \right) k^2 \qquad (4.133)$$

وبالنظر إلى المعادلة (4.129)، فإن:

$$\left(\frac{\omega_1^2 a^2}{4} \right) = \frac{Ka}{m/a} \qquad (4.134)$$

وبالنظر إلى المعادلتين (4.101)، (4.104)، فإن:

$$\frac{\omega_1^2 a^2}{4} = u^2 \qquad (4.135)$$

حيث (u) هي سرعة انتقال الاهتزازات في النظام، أي سرعة الأمواج فيه.

أي:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + u^2 k^2 \qquad (4.136)$$

ولنتدبر الآن أثر العلاقة (4.131) على المعادلة (4.124).

في ضوء الشرط الممثل بالمعادلة (4.131)، فإن الازاحة (Ψ_i) تتغير من كتلة إلى أخرى ببطء وكأنها دالة متصلة. فإذا كانت الكتلة رقم (i) عند النقطة (x) ، فإن ذلك يعني أن:

$$\Psi_i(t) \simeq \Psi(x, t) \qquad (4.137)$$

حيث $\left(\Psi(x,t)\right)$ هي دالة متصلة.

كذلك، فان:

$$\Psi_{i \pm 1}(t) \simeq \Psi(x \pm a, t) \tag{4.138}$$

وعليه، تؤول المعادلة (4.124) إلى الشكل الآتي:

$$m \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega_0^2 \Psi(x,t) + K[\Psi(x+a,t) - \Psi(x,t)]$$

$$- K[\Psi(x,t) - \Psi(x-a,t)] \tag{4.139}$$

وبالنظر إلى العلاقة (4.131)، فإن:

$$\Psi(x \pm a, t) \simeq \Psi(x,t) \pm a \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.140}$$

حيث اكتفينا بكتابة الحدود الثلاثة الأولى من متتالية تيلر Taylor.

بذلك، فإن:

$$m \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega_0^2 \Psi(x,t) + Ka^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.141}$$

أي:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{m/a}{Ka} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{m/a}{Ka} \omega_0^2 \Psi(x,t) \tag{4.142}$$

وبالنظر إلى المعادلتين (4.134)، (4.135)، فإن:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega_0^2}{u^2} \Psi(x,t) \tag{4.143}$$

وهي معادلة أمواج من نوع جديد يختلف قليلاً عن النمط المألوف الذي اشتققناه وتناولناه سابقاً.

إذاً، فعند حد الاتصالية، تؤول معادلة الحركة وعلاقة التشتت لنظام البندولات إلى

الشكلين الآتيين:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega_0^2}{u^2}\Psi(x,t) \qquad (4.144)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + u^2k^2 \qquad (4.145)$$

والحق أن المعادلة (4.145) تذكرنا كثيراً بمعادلة طاقة الجسيْم الحر المنتظم السرعة في نظرية النسبية الخاصة.

أي:

$$E^2 = E_0^2 + c^2p^2 \qquad (4.146)$$

حيث (E_0) طاقة السكون Rest Energy:

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad (4.147)$$

حيث (c) سرعة الضوء في الفراغ، (m_0) كتلة السكون للجسيْم، (p) زخم الجسيْم.

وفي ضوء هذا التشابه، فهل يجوز أن نعتبر المعادلة (4.146) علاقة تشتت لنظام موجي؟

من الواضح أنه يجوز أن نعتبرها كذلك إذا افترضنا أن حركة الجسيْم ترتبط بصورة أو بأخرى مع حركة موجية ترددها (ω) وعددها الموجي (k)، بحيث إن:

$$E = \hbar\omega \qquad (4.148)$$

$$p = \hbar k \qquad (4.149)$$

حيث $(\hbar)$ هو حاصل ضرب (2π) في ما يسمى ثابت بلانك.

والحق أن هذا الافتراض هو أساس نظرية الكنتم Quantum Theory. وتسمى المعادلة (4.148) معادلة بلانك، لأن بلانك كان أول من توصل إليها عن طريق بحوثه في ثيرموديناميكا الإشعاع الكهرَمغناطيسي. أما المعادلة (4.149)، فتسمى معادلة دي برولي،

لأن دي برولي كان اول من صاغها على أساس المقارنة التي أجراها بين البصريات Optics وبين الميكانيكا Mechanics، وعلى أساس تعميمه معادلة بلانك لتشمل المادة «الكتلية» في جميع أشكالها.

وفي ضوء المعادلتين (4.148)، (4.149)، تؤول المعادلة (4.146) إلى الشكل الآتي:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + c^2k^2 \qquad (4.150)$$

حيث:

$$\omega_0^2 = \frac{E_0^2}{\hbar^2} = \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \qquad (4.151)$$

وعلى هذا الأساس، فلا مفرّ من اعتبار المعادلة (4.150) علاقة التشتت لمعادلة من طراز المعادلة (4.144) هي الآتية:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^2 \Psi(x, t) \qquad (4.152)$$

وتسمى المعادلة (4.152) معادلة كلاين - غوردن Klein-Gordon Equation. وهي تصف حركة البوزونات الحرة Free Bosons. والبوزونات هي الجسيْمات دون النووية المعدومة الغزل Spin.

ولتوضيح مغزى المعادلة (4.152)، نتدبر حلاً بسيطا للمعادلة (4.152) يتمثل في الدالة الآتية:

$$\Psi(x, t) = A(x)\cos(\omega t + \phi) \qquad (4.153)$$

وفي ضوء ذلك تؤول المعادلة (4.152) إلى الآتي:

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2}(\omega_0^2 - \omega^2)A(x) \qquad (4.154)$$

وفي حال الجسيْمات الحقيقية Real Particles، فإن:

$$\omega \geq \omega_0 \qquad (4.155)$$

حيث إن الطاقة الكلية $(\hbar\omega)$ في هذه الحال تفوق طاقة السكون $(\hbar\omega_0)$ بالضرورة، بالنظر إلى أن طاقة الحركة دوماً موجبة.

بذلك، فان:

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} = -\alpha^2 A(x) \qquad (4.156)$$

حيث:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2} \qquad (4.157)$$

ومن الواضح أن المعادلة (4.156) تمثل حركة توافقية بسيطة في $(A(x))$. ومن ثم، فإن الحل يأخذ الشكل العام الآتي:

$$\Psi(x, t) = B \sin(\alpha x + \phi_0) \cos(\omega t + \phi) \qquad (4.158)$$

وإذا كانت الشروط الابتدائية كالآتي:

$$\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0 \qquad (4.159)$$

حصلنا على أمواج موقوفة يمثلها التعبير الآتي:

$$\Psi(x, t) = B \sin \alpha x \cos(\omega t + \phi) \qquad (4.160)$$

حيث:

$$\alpha = \frac{\pi n}{L} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (4.161)$$

لكن الحالة الأكثر أهمية وإثارة للاهتمام هي تلك الممثلة بالعلاقة الآتية:

$$\omega = 0 \qquad (4.162)$$

ماذا تعني هذه الحالة فيزيائياً؟

إنها تعني في الواقع حالة الفراغ Vacuum State، والتي تتسم بغياب الجسيْمات الحقيقية Real Particles. لكن ذلك لا يعني غياب الجسيْمات بالمطلق. ذلك أن ميكانيكا الكنتم Quantum Mechanics تبيح لحالة الفراغ أن تتضمن ما يسمى

الجسيْمات الافتراضية Virtual Particles التي تبقى لفترات قصيرة، بمعنى تنشأ من الفراغ وتتلاشى بعد مضي فترات قصيرة، على أساس مبدأ اللايقين Uncertainty Principle، الذي وضعه هايزنبرغ Heisenberg. وهذه الجسيْمات هي المسؤولة عن مجالات القوى الرئيسية، كالقوتين النوويتين والقوة الكهرَمغناطيسية.

وعلى أساس المعادلة (4.162) تؤول المعادلة (4.154) إلى الشكل الآتي:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} A(x) \qquad (4.163)$$

والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$A(x) = a_1 e^{-\frac{\omega_0 x}{c}} + a_2 e^{\frac{\omega_0 x}{c}} \qquad (4.164)$$

وإذا افترضنا أن $\left(A(x)\right)$ تقترب من الصفر كلما اقتربنا من اللانهاية، تبين لنا أن:

$$a_2 = 0 \qquad (4.165)$$

وعليه، وبالنظر إلى المعادلة (4.153)، فإن:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{-\frac{\omega_0 x}{c}} \qquad (4.166)$$

ومعنى ذلك أن (Ψ) تهبط هبوطاً سريعا في المدى (l)،حيث:

$$l = \frac{c}{\omega_0} = \frac{\hbar}{m_0 c} \qquad (4.167)$$

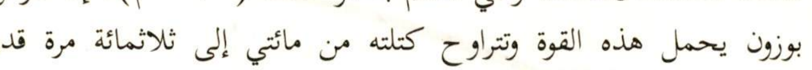
وبعبارة أخرى، فان المدى (l) هو مدى فعل الجسيْم الافتراضي الذي تمثله (Ψ) ومدى فاعليته وتأثيره. وعليه فإن (l) تحدد أيضاً مدى القوة المجالية التي تنقلها الجسيْمات الافتراضية.

ويكمن جوهر العلاقة (4.167) في كون هذا المدى يتناسب عكسيا مع كتلة الجسيْم الافتراضي الذي يحمل القوة المجالية. بذلك يغدو من الممكن تفسير خصائص القوى المجالية المختلفة بدلالة خصائص الجسيْمات التي تحملها. وعلى سبيل المثال، فإن

كون الفوتون عديم الكتلة يفسر لانهائية مدى القوة الكهرَمغناطيسية. وكذا الحال مع قوة الجاذبية، حيث إن انعدام كتلة الغرافيتون Graviton يفسر لانهائية مدى القوة. وقد سخّر العالم الياباني يوكاوا Yukawa هذه العلاقة عام ١٩٣٥ لتفسير خصائص القوة النووية القوية Strong Nuclear Force، والتي تتسم بقصر مداها ($١٠^{-١٠}$ م). إذ افترض يوكاوا وجود بوزون يحمل هذه القوة وتتراوح كتلته من مائتي إلى ثلاثمائة مرة قدر كتلة الإلكترون، لكي يتسنى له تفسير قصر مدى هذه القوة على أساس العلاقة (4.167)، وأسماه الميزون Meson. وبالفعل، فقد تم فيما بعد العثور على جسيْم يحمل صفات ميزون يوكاوا، وأخذ يعرف باسم ميزون – باي π -meson أو بيون Pion.

(٤ , ٥) الأمواج المستعرضة في وتر متصل

تدبّر وتراً متصلا Continuous في حالة اتزان، ممتدا بين النقطة الثابتة $(x = 0)$ وبين $(x = +\infty)$، على نحو ما هو مبين في الشكل (٤ , ١٨).



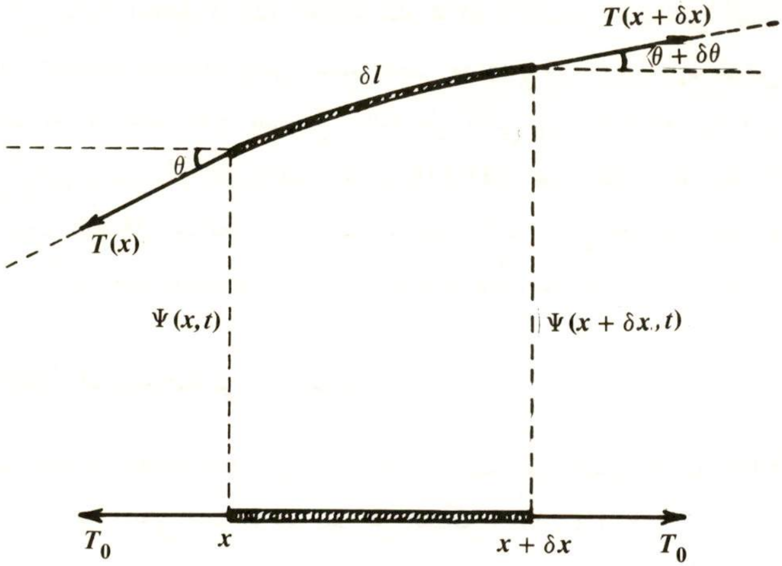
الشكل (٤ , ١٨) – وتر متصل في حالة اتزان

ولنفترض أن الوتر منتظم الكثافة الطولية (ϱ_0) والشد (T_0)، بمعنى أن الكثافة والشد لا يتغيران من نقطة إلى أخرى عبر الإحداثي (x). وبصورة خاصة، تدبّر جزءاً صغيرا من الوتر طوله (δx) عند النقطة (x).

إذا أحدث اضطراب مستعرض Transverse في الوتر، اهتز الجزء الصغير (δx) وغيره من أجزاء الوتر في اتجاه عمودي على الوتر، بإزاحات (Ψ) تتغير بصورة متصلة من نقطة مكانية إلى أخرى ومن لحظة زمنية إلى أخرى؛ أي:

$$\Psi = \Psi(x, t) \qquad (4.168)$$

وذلك كما هو مبين في الشكل (٤ , ١٩) .



الشكل (٤ , ١٩) - الوتر في وضع عدم الاتزان

لاحظ أن الشد يتغير بفعل الحركة الاهتزازية من (T_0) إلى (T) ، لكون طول الجزء المعني يتغير من (δx) إلى (δl). لكننا نفترض أن التغيير يكون طفيفا لصغر الازاحات (Ψ).

والسؤال الأساسي المطروح هنا هو : ما هي المركبة العمودية لمحصلة القوى المؤثرة على الجزء المعني بفعل الشد ، والمسؤولة عن اهتزازه المستعرض؟

يتضح من الشكل (٤ , ١٩) أن هذه المحصلة تساوي حاصل جمع المركبة العمودية للشد (T) عند النقطة (x) والأخرى عند النقطة $(x + \delta x)$ ؛ أي :

$$\delta F_\Psi = T(x+\delta x)\sin(\theta+\delta\theta) - T(x)\sin\theta \qquad (4.169)$$

$$\delta F_\Psi = T(x+\delta x)\cos(\theta+\delta\theta)\tan(\theta+\delta\theta) - T(x)\cos\theta\tan\theta \qquad (4.170)$$

بيْد أن المركبة الأفقية للشد (T) عند كلتا النقطتين تساوي (T_0) ؛ أي :

$$T(x+\delta x)\cos(\delta+\delta\theta) = T(x)\cos\theta = T_0 \qquad (4.171)$$

وعليه، فإن :

$$\delta F_\Psi = T_0 \tan(\theta+\delta\theta) - T_0 \tan\theta \qquad (4.172)$$

لكن ($tan\,\theta$) ليست سوى تحدر Gradient الوتر عند النقطة (x) ؛ أي :

$$\tan\theta = \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} \qquad (4.173)$$

$$\tan(\theta+\delta\theta) = \frac{\partial\Psi(x+\delta x,t)}{\partial x} \qquad (4.174)$$

وعليه، فإن :

$$\delta F_\Psi = T_0 \frac{\partial}{\partial x}[\Psi(x+\delta x,t) - \Psi(x,t)] \qquad (4.175)$$

$$\simeq T_0 \frac{\partial}{\partial x}[\Psi(x,t) + \delta x\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} - \Psi(x,t)] \qquad (4.176)$$

$$\simeq T_0\delta x \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} \qquad (4.177)$$

ووفق قانون نيوتن الثاني في الحركة، فان (δF_Ψ) تساوي حاصل ضرب كتلة الجزء المعني في تسارعه.

وفي هذه الحال، فإن :

$$\delta m = \varrho_0\,\delta x \qquad (4.178)$$

حيث (δm) هي الكتلة.

أما التسارع، فهو $\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)$.

وعليه، فإن:

$$\delta F_{\Psi} = T_0 \, \delta x \, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \varrho_0 \, \delta x \, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{4.179}$$

أي:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\varrho_0}{T_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.180}$$

وهي معادلة الأمواج التقليدية التي سبق أن «اشتققناها» من اعتبارات نظرية ورياضية بحتة. كما أنه سبق وأن اشتققنا المعادلة (4.180) بوصفها حد الاتصال لنظام من الكتل المرتبطة معاً بأوتار والمهتزة اهتزازات مستعرضة.

وإذا ما قارنّا المعادلة (4.180) مع معادلة الأمواج التقليدية، تبيّن لنا أن «سرعة» الموجة (u) تساوي:

$$u = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho_0}} \tag{4.181}$$

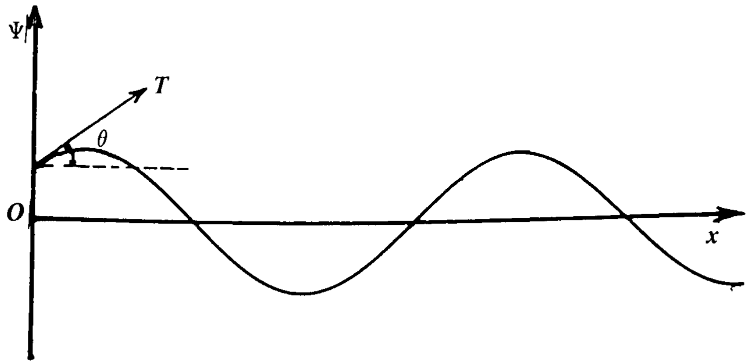
وهي نتيجة اشتققناها سابقاً. وتدل على أن سرعة الموجة لا تعتمد سوى على خصائص الوسط الذي تنتقل فيه: الخصائص المتعلقة بالمرونة (T_0) والخصائص القصورية (ϱ_0).

أما علاقة التشتت المناظرة للمعادلة (4.180)، فهي، وكما أسلفنا:

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho_0}} \, k$$

(٤ , ٦) توليد الأمواج المستعرضة في الأوتار المشدودة

ما هي القوة العمودية التي ينبغي بذلها حتى يتسنى لنا توليد أمواج مستعرضة في وتر مثالي يبدأ عند ($x = 0$) ويمتد إلى اللانهاية؟



الشكل (٤ , ٢٠) – القوة الدافعة للأمواج

نفترض أن هناك مصدراً للقوة عند $(x = 0)$. ويتضح من الشكل (٤ , ٢٠) أن رد فعل الوتر للقوة العمودية الدافعة للأمواج، والمؤثر على مصدر هذه القوة، هو المركبة العمودية لتوتر الوتر:

$$R_\Psi = T \sin\theta \tag{4.182}$$

$$= T \cos\theta \tan\theta \tag{4.183}$$

$$= T_0 \tan\theta \tag{4.184}$$

حيث (T_0) هي التوتر في الوتر في حال الاتزان.

ولما كانت $(\tan\theta)$ هي تحدر Gradient الوتر عند $(x = 0)$، فإن:

$$R_\Psi = \frac{\partial\Psi(0,t)}{\partial x} \tag{4.185}$$

ولكن، في هذه الحال، وكما بينّا سابقا، فإن:

$$\Psi(x, t) = \Psi(x - ut) \tag{4.186}$$

أي إن :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{u} \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \qquad (4.187)$$

بذلك فإن :

$$R_\Psi = -Z \frac{\partial \Psi(0,t)}{\partial t} \qquad (4.188)$$

حيث :

$$Z = \frac{T_0}{u} \qquad (4.189)$$

وتسمى (Z) المعاوَقة Impedance.

وعليه، فإن القوة الدافعة للأمواج تساوي :

$$F_\Psi = -R_\Psi = Z \frac{\partial \Psi(0,t)}{\partial t} \qquad (4.190)$$

ولما كانت $\left(\frac{\partial \Psi(0,t)}{\partial t}\right)$ تمثل السرعة العمودية عند $(x = 0)$ ، فإن (R_Ψ) تمثل نوعاً من المقاومة Drag Force، كما هو الحال مع قوى الاحتكاك.

فهي لا تعتمد على التسارع، كما هو الحال مع القوى القصورية، ولا تعتمد على الإزاحة، كما هو الحال مع القوى التوافقية البسيطة، وإنما تعتمد على السرعة، كما هو الحال مع قوى الاحتكاك. وعليه، فإن القوة اللازمة لتوليد الأمواج (F_Ψ) ينبغي أن تكون من النوع القادر على التغلب على معاوَقة الوتر. وليس غريباً أن تكون قوة دفع الأمواج من صنف القوى المبددة للطاقة. فهي بالفعل تبدد طاقة المصدر عبر الوتر، وإن كانت تفعل ذلك بصورة منتظمة تمكننا من استرداد هذه الطاقة «المبددة».

(٤ , ٧) انعكاس الأمواج

إذا تدبّرنا أمواجا وترية وأنعمنا النظر فيها، لاحظنا أنه يمكن اعتبار كل جزء من أجزاء الوتر مصدراً لاضطراب الأجزاء التي تليه. وتعرف هذه الملاحظة في شكلها المعمم بمبدأ

هويغنز Huygens'Principle، نسبة إلى العالم الهولندي هويغنز. ومعنى ذلك أن كل جزء يؤثر على الجزء الذي يليه بالقوة:

$$F_{\Psi}(x, t) = Z \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \qquad (4.191)$$

والآن، إذا كانت $(Z_1 = Z_2)$، أثّر الوتر على الأداة في نهايته بالقوة $\left(Z_1 \frac{\partial\Psi(0,t)}{\partial t}\right)$ وكان رد فعل الأداة على الوتر عند $(x = 0)$ هو $\left(-Z_1 \frac{\partial\Psi(0,t)}{\partial t}\right)$. بذلك، فإن الحركة الموجية تتوقف عند $(x = 0)$ من دون أي تعقيدات، بمعنى أن الاداة تمتص الأمواج الساقطة Incident Waves عليها. ونحصل على النتيجة ذاتها إذا مددنا الوتر ذاته من $(x = 0)$ إلى $(x = +\infty)$، أي إذا استبدلنا وتراً (من طراز الوتر الأول) يمتد من $(x = 0)$ إلى $(x = +\infty)$ بالأداة الماصة للأمواج الساقطة.

ولكن، ماذا لو كانت $(Z_1 \neq Z_2)$؟

في هذه الحال، فإن جزءاً فقط من رد فعل الأداة المؤثرة على الوتر يذهب لامتصاص الأمواج الساقطة. اين يذهب الجزء المتبقي؟

من الواضح أن الجزء المتبقي يذهب إلى دفع الأمواج في اتجاه تناقص (x). وبتعبير آخر، فإن جزءاً من الأمواج الساقطة يتم امتصاصه وجزءاً آخر يتم انعكاسه.

ولنفترض أن إزاحة الأمواج الساقطة هي (Ψ_i) وأن إزاحة الأمواج المنعكسة هي (Ψ_r). في هذه الحال، فإن القوة الكلية التي تؤثر بها الأداة (المكبس) على الوتر في اتجاه تناقص (x) تساوي حاصل جمع قوة امتصاص الأمواج الساقطة مع قوة دفع (توليد) الأمواج المنعكسة. أي:

$$F_T = -Z_1 \frac{\partial\Psi(0,t)}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial\Psi_r(0,t)}{\partial t} \qquad (4.192)$$

بيد أن هذه تساوي أيضاً رد فعل الأداة لحركة الوتر الكلية (الساقطة والمنعكسة) والذي يتمثل في حاصل ضرب $(-Z_2)$ في السرعة العمودية الكلية للوتر عند $(x = 0)$. وهذه السرعة هي:

$$\frac{\partial \Psi(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[\Psi_i(0, t) + \Psi_r(0, t)] \qquad (4.193)$$

$$= \frac{\partial \Psi_i(0,t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_r(0,t)}{\partial t} \qquad (4.194)$$

وعليه، فإن :

$$-Z_2\frac{\partial \Psi_i(0, t)}{\partial t} - Z_2\frac{\partial \Psi_r(0,t)}{\partial t} = -Z_1\frac{\partial \Psi_i(0,t)}{\partial t} + Z_1\frac{\partial \Psi_r(0,t)}{\partial t} \qquad (4.195)$$

أي :

$$\frac{\partial \Psi_r(0,t)}{\partial t} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\frac{\partial \Psi_i(0,t)}{\partial t} \qquad (4.196)$$

$$= R_{12}\frac{\partial \Psi_i(0,t)}{\partial t} \qquad (4.197)$$

حيث :

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (4.198)$$

تسمى معامل الانعكاس Reflection Coefficient.

ومن المعادلة (4.197)، فإن :

$$\Psi_r(0, t) = R_{12}\Psi_i(0, t) \qquad (4.199)$$

$$\Psi_r(0, t) = R_{12}A\cos\omega t \qquad (4.200)$$

ولما كانت الموجة المنعكسة موجة جيبية تتحرك في اتجاه تناقص (x)، فإن :

$$\Psi_r(x, t) = R_{12}A\cos(\omega t + kx) \quad (x<0) \qquad (4.201)$$

بذلك، فإن الإزاحة الكلية في الوتر عند أي نقطة (x) وزمن (t) هي :

$$\Psi(x, t) = \Psi_i(x, t) + \Psi_r(x, t) \quad (4.202)$$

$$= A \cos(\omega t - kx) + R_{12} A \cos(\omega t + kx) \quad (4.203)$$

ولنتدبر المعادلة (4.198).

من الواضح أن :

$$-1 \leq R_{12} \leq +1 \quad (4.204)$$

وإذا كانت (R_{12}) سالبة، فمعنى ذلك أن شكل الموجة Waveform الساقطة ينقلب رأساً على عقب عند الانعكاس. أما إذا كانت $(Z_1 = Z_2)$، فإن $(R_{12} = 0)$، الأمر الذي يعني أن الأمواج الساقطة تمتصها الأداة (المكبس) كلياً عند حدوث أي انعكاس، كما أسلفنا.

واذا كانت $(Z_2 = 0)$، كانت $(R_{12} = 1)$. ومعنى ذلك أن الأمواج الساقطة تنعكس كليا عند $(x = 0)$ من دون أن ينقلب شكلها الموجي Waveform، أي من دون أن يتغير طورها. وفي هذه الحال يكون الوتر أو الاداة عند $(x = 0)$ حر الحركة في الاتجاه العمودي.

أما إذا كانت :

$$Z_2 \longrightarrow +\infty$$

أي إذا كان الوتر مثبتاً كليا عند $(0 = x)$، بحيث لم يتحرك البتة في الاتجاه العمودي، فإن :

$$R_{12} = \frac{1 - Z_2/Z_1}{1 + Z_2/Z_1} \longrightarrow -1 \quad (4.205)$$

وهذا يعني أن الأمواج الساقطة تنعكس كلياً عند $(x = 0)$، ولكن بصورة مقلوبة، بمعنى أن شكلها الموجي ينقلب رأساً على عقب عند الانعكاس، أي إن طورها يتغير بزاويتين قائمتين (π). وبالنظر إلى المعادلة (4.203)، فإنه يتكون لدينا في هذه الحال أمواج موقوفة Standing Waves. وتعد هذه الطريقة الطريقة المألوفة لتوليد الأمواج الموقوفة.

وإذا استبدلنا وتراً معاوَقته (Z_2) ويمتد إلى $(+\infty)$ بالأداة (المكبس)، كانت الموجة المنعكسة هي ذاتها. أما الجزء الممتص (الذي يمتصه الوتر الثاني) فيتمظهر على شكل موجة منقولة Transmitted Wave تتحرك في اتجاه تزايد (x) بسرعة طور مختلفة عن نظيرتها للموجتين الساقطة والمنعكسة. ذلك أن الجزء المتحرك للوتر الأول عند $(x = 0)$ هو بمثابة مصدر قوة دفع موجي بالنسبة إلى الوتر الثاني.

كيف تكون العلاقة ما بين إزاحة الموجة الساقطة (Ψ_i)، وإزاحة الموجة المنعكسة (Ψ_r)، وإزاحة الموجة المنقولة (Ψ_T)، عند $(x = 0)$؟

لما كانت حركة الوتر الأول عند $(x = 0)$ بتأثير الموجتين الساقطة والمنعكسة تشكل مصدراً لحركة الموجة المنقولة، فإنه ينبغي أن تكون $(\Psi_T(x, t))$ مساوية لحاصل جمع (Ψ_i)، (Ψ_r) عند $(x = 0)$ لجميع الأزمان، بمعنى أن المنحنى الموجي عند $(x = 0)$ ينبغي أن يكون متصلاً Continuous.

أي:

$$\Psi_i(0, t) + \Psi_r(0, t) = \Psi_T(0, t) \qquad (4.206)$$

ومن المعادلة (4.199)، فإن:

$$[1 + R_{12}]\, \Psi_i(0, t) = \Psi_T(0, t) \qquad (4.207)$$

$$= T_{12}\, \Psi_i(0, t) \qquad (4.208)$$

بذلك، فإن:

$$T_{12} = 1 + R_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad (4.209)$$

حيث (T_{12}) هي ما يسمى معامل الإرسال Transmission Coefficient.

من ثم، فإن:

$$\Psi(x, t) = T_{12}\, A \cos(\omega t - k_T x) \qquad (4.210)$$

حيث (k_T) هي العدد الموجي للموجة المنقولة.

أو :

$$k_T = \frac{\omega}{u_T} \qquad (4.211)$$

حيث (u_T) هي سرعة الطور للموجة المنقولة .

ويلاحظ من المعادلة (4.209) أن :

$$0 \leq T_{12} \leq 2 \qquad (4.212)$$

وهذا يعني ان (T_{12}) هي دائماً موجبة ، ومن ثم فإن الشكل الموجي للموجة الساقطة لا ينقلب أبداً عند انتقالها من الوسط (الوتر) الأول إلى الوسط (الوتر) الثاني . فالموجة الساقطة تنتقل دوماً بالشكل الموجي ذاته من وسط إلى آخر .

كذلك ، وبعكس الموجة المنعكسة ، فإن الموجة المنقولة يمكن أن يكون اتساعها Amplitude أكبر من اتساع الموجة الساقطة . وهو يصل أوجه عندما تكون (Z_2) صفراً أو قريبة جداً من الصفر . فعند ذاك تكون $(T_{12} = 2)$ ، بمعنى أن اتساع الموجة المنقولة يكون ضعف اتساع الموجة الساقطة .

وإذا كانت $(Z_1 = Z_2)$ ، كان اتساع الموجة المنقولة مساوياً لاتساع الموجة الساقطة. لكن هذا لا يعني أن الوترين (الوسطين) مماثلان لبعضهما . كلا ! فلما كانت :

$$Z = \sqrt{T\varrho} \qquad (4.213)$$

حيث (T) هي التوتر ، (ϱ) هي الكثافة الطولية ، فإنه يمكن أن تتغير (ϱ) ، (T) بحيث تبقى (Z) ثابتة . لكن من الواضح أن (u) ، والتي تساوي $\left(\sqrt{\frac{T}{\varrho}}\right)$ ، تتغير من وتر إلى آخر .

وبالنظر إلى هذه العلاقات ، فإذا كان التوتر في الوتر الأول مساوياً للتوتر في الوتر الثاني ، كانت :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{u_2}{u_1} \qquad (4.214)$$

حيث (u_1) هي سرعة الطور في الوتر الأول، (u_2) هي سرعة الطور في الوتر الثاني.

ومن ثم، كانت:

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= \frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2} \\ T_{12} &= \frac{2u_2}{u_1 + u_2} \end{aligned}\right] \qquad (4.215)$$

والآن، إذا عرّفنا معامل الانكسار Refractive Index بالعلاقة الآتية:

$$n \, \alpha \, \frac{1}{u} \qquad (4.216)$$

(وهو التعريف المستمد من النظرية الموجية في الضوء)، حصلنا على العلاقة الآتية:

$$R_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad (4.217)$$

وهي معادلة عامة تنطبق أيضا على الضوء وغيره من الأمواج الكهرَمغناطيسية.

وعلى سبيل المثال، إذا كان لدينا وسط هوائي وآخر زجاجي يفصلهما عن بعضهما سطح مستوٍ أفقي، وإذا سقط شعاع ضوئي سقوطاً عموديا على هذا السطح في الوسط الهوائي، وإذا كان معامل اتكسار الهواء (١) وكان معامل انكسار الزجاج (١,٥)، كانت (R_{12}):

$$R_{12} = \frac{1 - 1.5}{1 + 1.5} = -\frac{1}{5} \qquad (4.218)$$

أي إن الشكل الموجي Waveform للضوء الساقط ينقلب رأسا على عقب عند الانعكاس، وإنه لا ينعكس سوى خمس الإزاحة الموجية الضوئية.

وإذا علمنا أن دفق الطاقة Energy Flux يتناسب طردياً مع مربع (R_{12})، تبيّن لدينا أن ٤٪ فقط من الطاقة الضوئية الساقطة تنعكس.

الفصـــل الخامـــس

مدخل مبسط الى معادلة شرودنغر الموجية

(٥,١) مقدمـــة

تشكل معادلة شرودنغر العصب العملي لميكانيكا الكنتم Quantum Mechanics، وهي الميكانيكا التي انبثقت من قلب الميكانيكا الكلاسيكية في الثلث الأول من القرن العشرين لمعالجة النظم الذرية ودون الذرية والكشف عن قوانينها وآلياتها. فمعادلة شرودنغر هي الأداة الأساسية في الفيزياء الذرية والجزيئية وفي الإلكترونيات وفيزياء الحالة الصلبة والمبلمرات وفيزياء السوائل والغازات وفي الكيمياء الذرية. وبصورة عامة، فإنها الأداة الطبيعية لوصف النظم الذرية ودون الذرية والتي لا تتضمن طاقات نسبية Relativistic.

ومعادلة شرودنغر هذه هي معادلة موجية. وسنبين في البنود الآتية كيف يمكن التوصل إليها بصورة مقنعة بعض الشيء (وهو ليس اشتقاقاً دقيقا) من معادلة الأمواج التي سبق أن درسنا بعض حلولها.

(٥,٢) البصريات الهندسية Geometrical Optics

من المعروف تجريبياً أن الضوء يتحرك وكأنه سيل من الجسيْمات النيوتونية إذا كان طول موجة الشعاع الضوئي أصغر بكثير من أبعاد الفتحات والأنفاق التي يمر فيها الشعاع.

كيف نشتق هذه الحقيقة من معادلة الأمواج؟

فلنتدبر معادلة الأمواج في حالة انتقال الأمواج في وسط غير متجانس بحيث تتغير سرعة الأمواج (u) مع الموضع (x)؛ أي:

$$u = u(x) \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2(x)}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{5.2}$$

في هذه الحال، وفي ضوء ما بيّناه سابقاً، فإن الحل العام للمعادلة يكون معقداً، ولا يكون من الصنف الممثل بالدالة [$f(x \pm ut)$].

والآن، إذا كان الوسط متجانساً، كانت (u) ثابتة في المكان، وكانت أبسط موجة منتقلة في هذا الوسط هي الموجة الجيبية:

$$\Psi(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}[ut - x] \tag{5.3}$$

والسؤال الذي يبرز هنا هو: كيف يتعدل شكل هذه الموجة إذا كانت تنتقل في وسط غير متجانس قليلاً بحيث تتغير خصائصه في المكان تدريجياً وببطء؟

اعتماداً على التجربة وطبيعة معادلة الأمواج، فإننا نتوقع أن تحافظ الموجة على شكلها العام بحيث يظل ممكنا التفريق ما بين الاتساع والطور، ونتوقع أن يقتصر التعديل على الطريقة التي يعتمد بها كل من الطور والاتساع على المكان والزمان. أي نتوقع أن تتخذ الموجة الشكل الآتي:

$$\Psi(x, t) = A(x, t) \cos \phi(x, t) \tag{5.4}$$

$$\phi(x, t) = \frac{2\pi}{\lambda}\theta(x, t) \tag{5.5}$$

حيث:

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial\lambda} = 0 \tag{5.6}$$

ومعنى ذلك :

(١) أن الاتساع ليس ثابتاً ، بل يتغير مكانياً وزمانياً ؛

(٢) أن سرعة الطور ليست ثابتة ، بل تتغير في المكان والزمان بصورة معقدة بعض الشيء ؛

(٣) أن للامواج المعدلة طولاً موجياً محددا وثابتا في المكان والزمان ، ولا يختلف في المعدل عن طول الموجة الجيبية البسيطة . وهذا يعني أن الأمواج الجيبية الابتدائية تحافظ على دوريتها Periodicity الأصلية .

وعليه فإن :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial A(x,t)}{\partial x} \cos \phi\,(x,\, t) - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} A \sin \phi\,(x,\, t) \tag{5.7}$$

من ثم ، فإن :

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} \cos\phi(x,t) - 2.\ \frac{2\pi}{\lambda} . \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \sin\phi$$

$$- \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) A \sin \phi - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 A \cos \phi \tag{5.8}$$

ويلاحظ أنه ، إذْ تقترب (λ) من الصفر ، يطغى الحد الأخير في المعادلة (5.8) على جميع الحدود الأخرى . من ثم :

$$As\ \lambda \longrightarrow 0,\ \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \longrightarrow - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 A \cos \phi\,(x,\, t) \tag{5.9}$$

كذلك ، فإن :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} \cos \phi\,(x,\, t) - \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) A \sin \phi\,(x,\, t) \tag{5.10}$$

من ثم، فإن :

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \cos\phi(x,t) - 2.\frac{2\pi}{\lambda}.\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\sin\phi$$

$$-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} A \sin\phi(x,t) - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 A\cos\phi(x,t)$$

(5.11)

وبالمثل، فإن :

$$As\,\lambda \longrightarrow 0,\ \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} \longrightarrow -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 A\cos\phi(x,t)$$

(5.12)

وعليه، فإذ تقترب (λ) من الصفر، فإن المعادلة (5.2) تقترب من الآتي :

$$-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 A\cos\phi(x,t) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 A\cos\phi(x,t) = 0$$

(5.13)

وبالنظر إلى المعادلة (5.5)، فإن :

$$\left(\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\right)^2 = 0 \qquad (5.14)$$

وتسمى المعادلة (5.14) معادلة الآيكونال Eikonal Equation.

ويبرز المغزى الفيزيائي لمعادلة الآيكونال حين نعممها لتشمل الأبعاد المكانية الثلاثة. عند ذاك تمثل (ϕ) سلسلة من السطوح المنحنية في المكان الثلاثي الأبعاد والتي تتغير وتتحرك مع الزمن. كذلك، فإن الحدّ الثلاثي الأبعاد الذي يحل محل $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$ يمثل التحدّر Gradient الثلاثي الأبعاد للسطح المعني من سطوح (ϕ) عند النقطة المعنية. ويكون هذا التحدّر متجهاً عموديا على السطح عند تلك النقطة. بذلك فإن معادلة الآيكونال تصف تغيّر التحدّرات العمودية لسطوح الطور مع الزمن، ومن ثم فهي تصف الأشعة Rays، أو المسارات التي تتبعها النقط المكونة لسطوح الطور، وكأن النظام الموجي المعني هو مجموعة من الجسيْمات النيوتونية التي تتحرك في مسارات محددة.

بذلك، فإن اختزال معادلة الأمواج إلى معادلة الآيكونال يعكس الحقيقة التجريبية بأن النظم الموجية تسلك سلوك الجسيْمات النيوتونية عند أطوال الموجة القصيرة. ومعنى ذلك أن معادلة الآيكونال تمثل ما يسمى البصريات الهندسية Geometrical Optics.

واذا كانت الأمواج المعنية أحادية التردد، كان الاتساع Amplitude مستقلاً عن الزمن، واتخذت الإزاحة (Ψ) الشكل الآتي:

$$\Psi\,(x,\,t) \;=\; A\,(x)\,cos\left(\omega t - \theta'(x)\right) \qquad (5.15)$$

ومن ثم، فإن:

$$\phi\,(x,\,t) \;=\; \omega t - \theta'(x) \qquad (5.16)$$

وعليه، فإن:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\omega^2}{u^2} \;=\; 0 \qquad (5.17)$$

أما معادلة الأمواج، فتتخذ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} \;+\; \frac{\omega^2}{u^2}\,\Psi\,(x,\,t) \;=\; 0 \qquad (5.18)$$

وتناظر المعادلتان (5.17)، (5.18) بعضهما، بمعنى أن المعادلة (5.17) هي الشكل التقريبي الجسيْمي للمعادلة (5.18).

(٥,٣) ميكانيكا هاملتون – جاكوبي

هناك دالة ميكانيكية تشكل عصباً رئيسيا في جسم الفيزياء هي ما يسمى الدالة اللاغرانجية (L) Lagrangian. وتعرّف هذه الدالة كالآتي:

$$L\,(x,\,\dot{x},\,t) \;=\; T\,(\dot{x}) - V\,(x,\,t) \qquad (5.19)$$

حيث ($T(\dot{x})$) هي طاقة الحركة، ($V(x,\,t)$) هي طاقة الوضع.

ويمكن كتابة القوانين الأساسية في الميكانيكا الكلاسيكية على صورة معادلة تفاضلية

للدالة اللاغرانجية.

ويمكن استخدام المعادلة (5.19) لتعريف كمية ميكانيكية جوهرية أخرى، هي الفعل (S)، حيث:

$$S(x, t) = \int L(x, \dot{x}, t)\, dt \qquad (5.20)$$

ويمكن اشتقاق القوانين الأساسية للميكانيكا الكلاسيكية جميعاً من مبدأ هاملتون Hamilton الذي ينص على أن الجسيْمات الكلاسيكية تتحرك في المسارات التي يكون الفعل عندها مستقراً Stationary، بمعنى يكون تغايره Variation صفراً. كذلك، فإنه يمكن كتابة هذه القوانين على صورة معادلة تفاضلية في (S)، وهي ما يسمى معادلة هاملتون – جاكوبي Hamilton-Jacobi Equation، وذلك على النحو الآتي:

إذا فاضلنا المعادلة (5.20) بالنسبة إلى البعد المكاني (x)، حصلنا على:

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \int - \frac{\partial V}{\partial x}\, dt \qquad (5.21)$$

لكن $\left(- \frac{\partial V}{\partial x} \right)$ هي القوة (F)؛ أي:

$$F = - \frac{\partial V}{\partial x} \qquad (5.22)$$

بذلك، وبالنظر إلى أن القوة هي معدل تغيّر الزخم (قانزن نيوتن الثاني)، فإن:

$$\frac{\partial S(x,\ t)}{\partial x} = \int \frac{dP}{dt} = P \qquad (5.23)$$

حيث (P) هي الزخم.

ويمكن استخدام المعادلة (5.23) للتعبير عن دالة الطاقة، أو ما يسمى الدالة الهاملتونية (H) Hamiltonian، بدلالة (S)، وذلك على النحو الآتي:

تعرف الدالة الهاملتونية بأنها:

$$H(x, P, t) = T(\dot{x}) + V(x, t) \qquad (5.24)$$

وبالنظر الى المعادلة (5.23)، فإن :

$$H = H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) \tag{5.25}$$

والآن ، إذا عدنا إلى المعادلة (5.20)، تبين أن :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = L(x, \dot{x}, t) \tag{5.26}$$

بيد أن :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \tag{5.27}$$

وبالنظر إلى المعادلة (5.23)، فإن :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x}P \tag{5.28}$$

لكن :

$$P\dot{x} = m\dot{x}^2 = 2T(\dot{x}) \tag{5.29}$$

حيث (m) هي الكتلة .

بذلك ، فإن :

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + 2T(\dot{x}) = L(x, \dot{x}, t) \tag{5.30}$$

$$= T(\dot{x}) - V(x, t) \tag{5.31}$$

أي :

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = -[T(\dot{x}) + V(x, t)] \tag{5.32}$$

$$= -H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) \tag{5.33}$$

وعليه :

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0 \qquad (5.34)$$

وهي معادلة هاملتون – جاكوبي.

واذا كانت طاقة النظام الكلية محفوظة، أي إذا لم تكن (V) تعتمد جلياً على الزمن:

$$V = V(x) \qquad (5.35)$$

فإن:

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = \varepsilon = -\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} \qquad (5.36)$$

حيث (ε) هي الطاقة الكلية المحفوظة.

وفي هذه الحال، فإن:

$$S(x, t) = W(x) - \varepsilon t \qquad (5.37)$$

ويذكرنا الشكل الممثل في المعادلة (5.37) بشكل طور الموجة المعدلة (ϕ).

وبالنظر إلى المعادلة (5.24)، فإن:

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = \frac{P^2}{2m} + V(x) \qquad (5.38)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) = \varepsilon \qquad (5.39)$$

من ثم، فإن:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - 2m\,[\varepsilon - V(x)] = 0 \qquad (5.40)$$

(٥,٤) معادلة شرودنغر الموجية

لنقارن بين المعادلة (5.17) والمعادلة (5.40).

$$\left.\begin{array}{l}(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 - \frac{\omega^2}{u^2(x)} = 0 \\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2 - 2m[\varepsilon - V(x)] = 0\end{array}\right] \quad (5.41)$$

من الواضح أن المعادلتين المبينتين في (5.41) هما من الطراز ذاته. على أية حال، هذا ما لاحظه الرياضي الإيرلندي، هاملتون Hamilton، في القرن التاسع عشر. وهذا ما لاحظه أيضا الفيزيائي النمساوي، إرفن شرودنغر Erwin Schrodinger، في العشرينات من القرن العشرين. وفي ضوء التطورات التي شهدها الربع الأول من القرن العشرين، وبخاصة تلك التي تمت على أيدي ألبرت آينشتاين ولوي دي برولي، فقد أثار هذا التشابه الكبير السؤال الآتي في ذهن شرودنغر: لئن كانت معادلة الآيكونال (5.17) هي التقريب الجسيْمي لمعادلة الامواج (5.18)، فلمَ لا تكون معادلة هاملتون- جاكوبي (5.40) التقريب الجسيْمي لمعادلة موجية تتعلق بحركة المادة؟

وبالفعل، فقد افترض شرودنغر وجود دالة موجية تتعلق بالسلوك الحركي للجسيْمات المادية، وافترض أنها تطيع المعادلة الموجية التي تناظر المعادلة (5.40)، بوصف الأخيرة هي معادلة الآيكونال للموجة المفترَضة.

وبعبارة أخرى، فقد افترض شرودنغر أن الفعل (S) يتناسب طرديا مع طور موجة تصف سلوك الجسيْمات وحركتها، وافترض أن ثابت التناسب هو ثابت بلانك مقسوما على (2π) — ($\hbar$). أي:

$$S(x, t) = \hbar\, \phi(x, t) \quad (5.42)$$

من ثم، تؤول المعادلة (5.40) إلى:

$$(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 - \frac{2m}{\hbar^2}[\varepsilon - V(x)] = 0 \quad (5.43)$$

وبمقارنة المعادلة (5.43) مع المعادلة (5.17)، فإن:

$$\frac{\omega^2}{u^2(x)} = \frac{2m}{\hbar^2}[\varepsilon - V(x)] \quad (5.44)$$

أي إن سرعة أمواج المادة (أمواج شرودنغر) تتحدد بكتلة الجسيْم وطاقته الكلية وطاقة وضعه.

وعليه، فإن معادلة الأمواج لهذا الصنف من الأمواج هي (انظر المعادلة (5.18)):

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\,[\varepsilon - V(x)]\,\Psi(x,t) = 0 \qquad (5.45)$$

وهي ما يسمى معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن.

وعلى هذا الأساس، فقد اعتبر شرودنغر الميكانيكا الكلاسيكية مجرد تقريب جسيْمي للمعادلة (5.45) ينهار عند الأبعاد الذرية ودون الذرية، تماماً كما تنهار البصريات الهندسية عند أبعاد قريبة من طول موجة الضوء. بذلك قدّم شرودنغر تفسيراً مقنعا للفشل الذي أبدته الميكانيكا الكلاسيكية في الربع الأول من القرن العشرين في تفسير الظاهرات الذرية.

ولكن ما هي طبيعة الإزاحة الموجية في هذه الحال؟ في حال الضوء مثلا، وحين اكتشفت طبيعته الموجية، ظنّ العلماء أن الإزاحة الموجية هي إزاحة مكانية في الأثير Ether، ذلك المحيط السحري الذي كان يظن أنه يملأ المكان برمته. ثم تبين لهم أنها في الواقع تغيرات دورية في المجال الكهرَمغناطيسي؟ ماذا بشأن أمواج المادة؟

الحق أن مسألة طبيعة أمواج المادة لمّا تحسمْ. فما زال الجدال، الذي ابتدأ في هذا الصدد في العشرينات، محتدماً. لكن التأويل الذي وضعه العالم الألماني ماكس بورن Max Born في نهاية العشرينات ما زال التأويل السائد والمسيطر. فقد اعتبر بورن أمواج المادة أمواج احتمال Probability Waves، بمعنى أنه اعتبر $[\Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)\,dx]$ أو $(|\Psi(x,t)|^2\,dx)$ احتمال وجود الجسيْم المعني بين (x)، $(x+dx)$ في اللحظة الزمنية (t).

ويثير هذا التأويل الكثير من المشكلات الفلسفية برغم نجاحه الكبير على صعيد الحسابات العملية والتجارب المخبرية. لكن المجال لا يسمح لنا بتناولها هنا. وقد نعالجها ونعالج تطبيقات المعادلة (5.45) في كتاب لاحق.

المراجـــع

1- Clark. H., **A First Course in Quantum Mechanics,** English Language Book Society and Van Nostrand, London (1982).

2- Clark,S.K., **Dynamics of Continuous Elements,** Prentice-Hall, New Jersey (1972).

3- Crawford,F,S., **Waves,** Berkeley Physics Course-Vol.3, Mcgraw-Hill, New York (1968).

4- Cropper, W.H., **The Quantum Physicists and an Introduction to Their Physics,** Oxford Univ. Press, New York (1970).

5- D'Abro, A., **The Rise of the New Physics, 2 Vols.,** Dover, New York (1939,1952).

6- De Broglie, L., **Foundations of Physics, Vol.1,** Plenum Press, New York (1970-1971), pp. (5-15).

7- Eisberg,R.M., **Fundamentals of Modern Physics,** Wiley, New York (1961).

8- Feather,N., **Mass Length and Time,** Penguin, Edinburgh (1963).

9- Feather,N., **Vibrations and Waves,** Penguin, Edinburgh (1964).

10- Flint, H.T., **Wave Mechanics,** Methuen, London (1967).

11- Frish, S.E., **Problems of Wave Optics,** Mir, Moscow (1976).

12- Gasiorowicz, S., **Quantum Mechanics,** Wiley, New York (1974).

13- Hall, H.E., **Solid State Physics,** English Language Book Society and Wiley, Chichester (1978).

14- Kitaigorodsky, A., **Introduction to Physics,** Mir, Moscow (1976).

15- Klein, M.V., **Optics,** Wiley, New York (1970).

16- Kompaneyets, A.S., **A Course of Theoretical Physics, 2Vols.,** Mir, Moscow (1978).

17- Lamb, H., **The Dynamical Theory of Sound,** Dover, New York (1925, 1960).

18- Landau,L. and Kitaigorodsky, A., **Physics for Everyone (Motion and Heat),** Mir, Moscow (1978).

19- Leech, J.W., **Classical Mechanics,** Methuen, London (1965).

20- Longhurst, R.S., **Geometrical and Physical Optics,** Longmans, London (1967).

21- Ludwig, G., **Wave Mechanics,** Pergamon, Oxford (1968).

22- Main, I.G., **Vibrations and Waves in Physics,** Cambridge Univ. Press, Cambridge (1985).

23- Muirhead., H., **The Physics of Elementary Particles,** Pergamon, Oxford (1965).

24- Myskis, A.D., **Advanced Mathematics for Engineers,** Mir, Moscow (1979).

25- Pain, H.J., **The Physics of Vibrations and Waves,** Wiley, New York (1968).

26- Ronchi, V., **The Nature of Light,** Heinemann, London (1970).

27- Rutherford, D.E., **Classical Mechanics,** Oliver and Boyd, Edinburgh (1964).

28- Savarensky, E., **Seismic Waves,** Mir, Moscow (1975).

29- Savelyev, I.V., **Fundamentals of Theoretical Physics, 2 Vols.,** Mir, Moscow (1982).

30- Savelyev, I.V., **Physics: A General Course, 3 Vols.,** Mir, Moscow (1981).

31- Skilling, H.H., **Fundamentals of Electric Waves,** Wiley (New York) and Toppan (Japan), 1984.

32- Smith, R.C. and Smith,P., **Mechanics,** English Language Book Society and Wiley, Chichester (1978).

33- Sommerfeld, A., **Optics, Vol.IV,** Academic Press, New York (1962).

34- Tarasov, L.V., **Laser Age in Optics,** Mir, Moscow (1981).

35- Yavorsky, B.and Detlaf, A., **Handbook of Physics,** Mir, Moscow (1977).

36- د. هشام غصيب، **أصول الميكانيكا الموجية**، الجمعية العلمية الملكية ودار الفرقان ومؤسسة الرسالة، عمـــان (١٩٨٣).

طبع في الجمعية العلمية الملكية
عمان - الأردن